Die Grundlehren

der

Theorie der Kreisfunktionen,

der ebenen

Trigonometrie und Polygonometrie

und der

sphärischen Trigonometrie.

Mit vielen Uebungsaufgaben.

Für höhere Lehranstalten, angehende Mathematiker und Techniker.

Von

Dr. C. H. Schnuse.

Mit in den Text gedruckten Holzschnitten.

Stuttgart.

Druck und Verlag der Chr. Belser'schen Buchhandlung.

1852.

Vorwort.

Der Zweck des vorliegenden Werkchens ist: von den Grundlehren der Kreisfunktionen, der ebenen Trigonometrie, der ebenen Polygonometrie und der sphärischen Trigonometrie eine dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft entsprechende, möglichst einfache Darstellung zu geben. — Von welcher Wichtigkeit die Kenntniß der genannten Disciplinen für das Studium der gesammten theoretischen und praktischen Mathematik ist, braucht hier nicht erst speciell erörtert zu werden. — Die gewöhnlichen Darstellungen der in Rede stehenden Lehren in den Lehrbüchern der Geometrie lassen hinsichtlich der Vollständigkeit und Wissenschaftlichkeit Vieles zu wünschen übrig, und man darf sagen: daß wohl seit 25 Jahren in der deutschen Literatur kein Werk über

Trigonometrie erschienen ist, welches den Forderungen der Gegenwart entspräche. — Inwiefern das gegenwärtige Werkchen diesen Forderungen entspricht, bleibt der Beurtheilung des Sachkundigen überlassen. —

Heidelberg, 1852.

Dr. C. H. Schnuse.

Inhaltsverzeichniß.

Erstes Buch.

Theorie der Kreisfunktionen.

Zweites Buch.

Ebene Trigonometrie.

Drittes Buch.

Sphärische Trigonometrie.

Anhang.

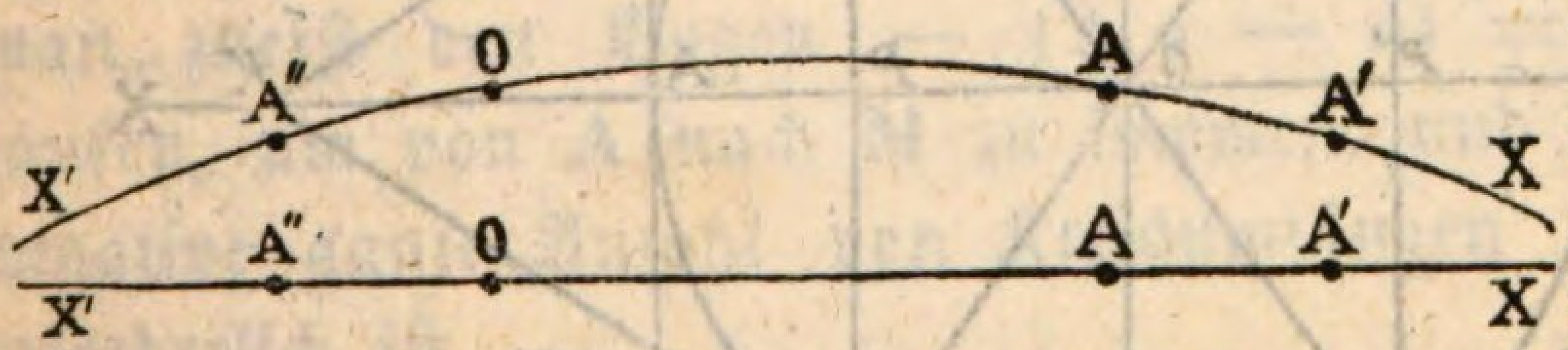
Erstes Buch.

Theorie der Kreisfunktionen.

§. 1. Wenn zwei veränderliche Größen so beschaffen sind: daß jedem Werthe der einen ein bestimmter Werth der andern entspricht; so sagt man: daß jede dieser beiden Größen eine Funktion der andern sei. So ist z. B. sowohl der Umfang, wie die Fläche eines Kreises eine Funktion des Halbmessers — und umgekehrt der Halbmesser eine Funktion des Umfanges, oder der Fläche des Kreises. Funktionen, welche aus der Betrachtung des Kreises entspringen, heißen Kreisfunktionen, mit deren Theorie wir uns zunächst beschäftigen wollen.

§. 2. Wenn auf einer geraden, oder krummen Linie X'X (Fig. 1) von einem festen Punkte O aus verschiedene Längen OA, OA', OA'', ꝛc. genommen und auf dieselbe Längeneinheit bezogen werden; so werden diese Längen durch positive, oder negative Zahlen ausgedrückt, je nachdem sie zur Rechten, oder Linken des Punktes O liegen — und wir werden sie der Kürze wegen oft positive, oder negative Längen nennen.

Fig. 1.

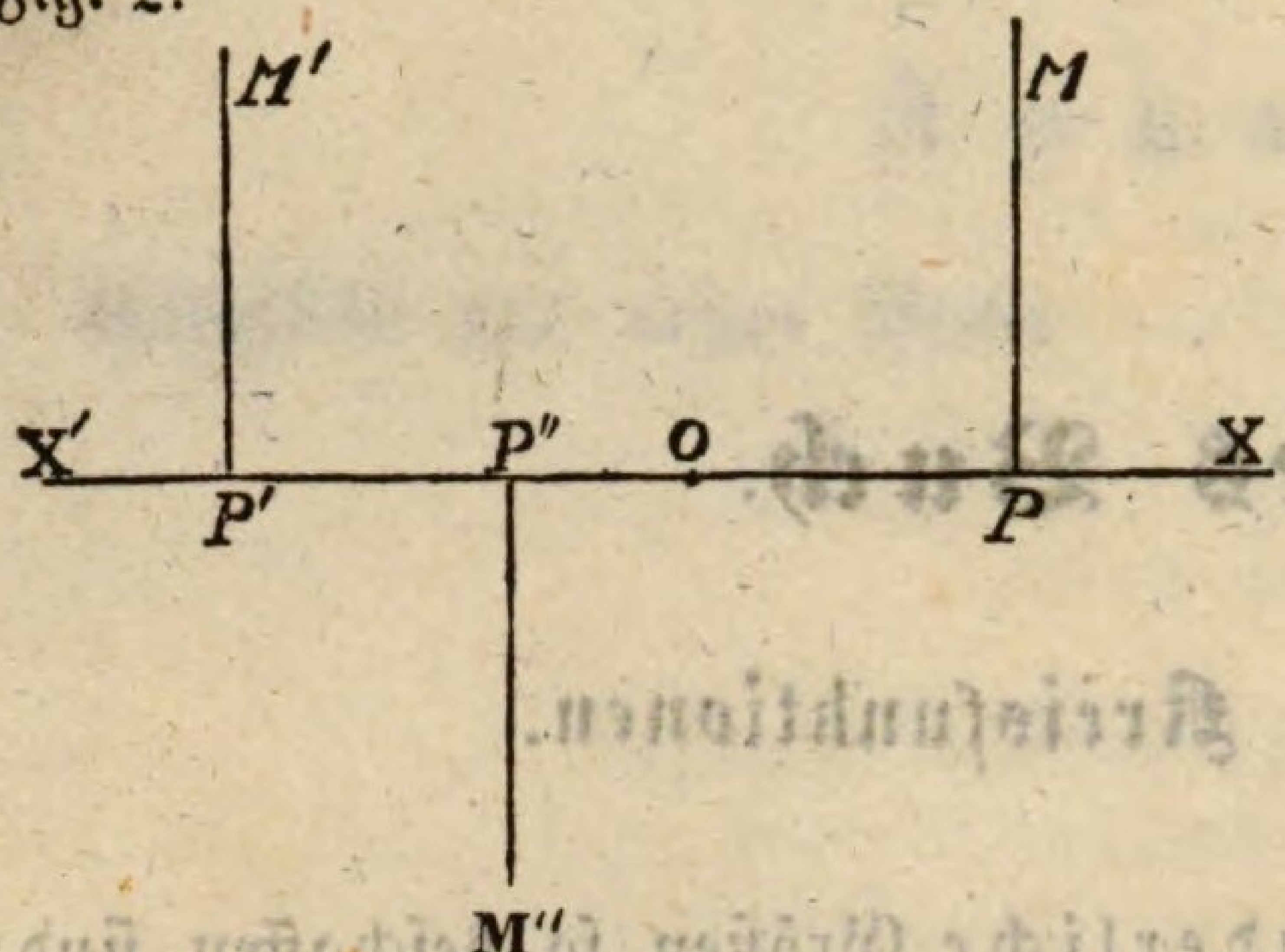


Wenn sich also ein Punkt von O aus nach der rechten, oder nach der linken Seite auf der Linie X'X fortbewegt, so sind seine Abstände von O positiv, oder negativ — und allgemein: die Längen, welche der bewegliche Punkt auf der Linie X'X durchläuft, werden als positiv, oder negativ betrachtet, je nachdem er sich von der Linken gegen die Rechte, oder von der Rechten gegen die Linke bewegt. —

Offenbar ist die Richtung oder der Sinn der positiven Längen ganz willkürlich, nur müssen die negativen Längen eine gerade entgegengesetzte Richtung haben. —

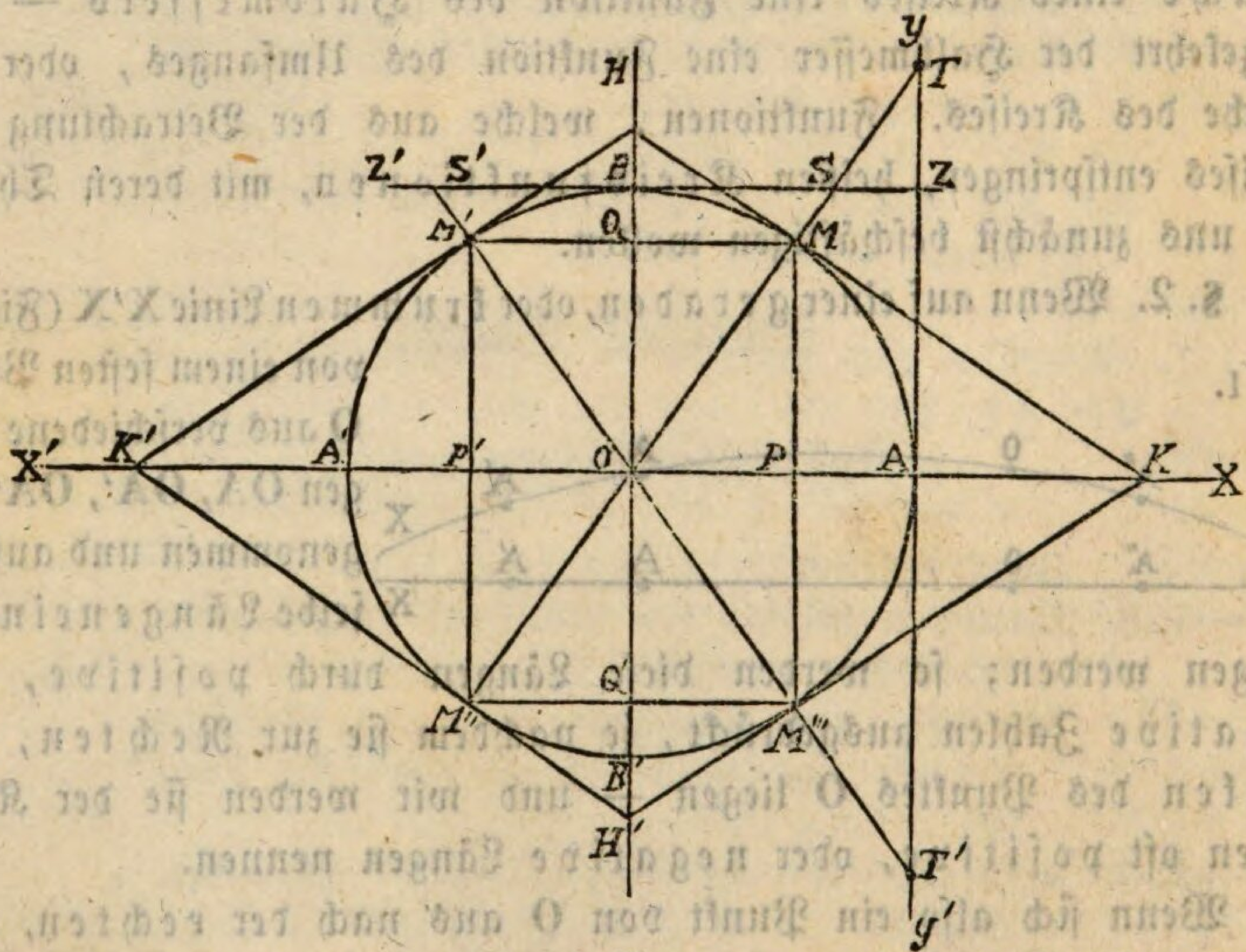
§. 3. Ebenso werden die Entfernungen der Punkte **M, M′, M″**, ꝛc. (Fig. 2) von der geraden Linie **X′X**, d. h. die Perpendikel **PM**, **P′M′**, **P″M″**, ꝛc. als positiv, oder negativ betrachtet, je nachdem sie über, oder unter der Linie **XX** liegen; also im ersten Falle durch positive und im zweiten durch negative Zahlen ausgedrückt. —

Fig. 2.



§. 4. Kreisbogen. — Es sei **O** (Fig. 3) ein Kreis, dessen Halbmesser = 1, also dessen Umfang = 2 π und dessen Quadrant = $\frac{\pi}{2}$ ist, wo π die Zahl 3,14159265358979... bedeutet. Ferner sei **A** ein fester Punkt des Kreisumfanges und **M** ein beweg-

Fig. 3.



licher Punkt, welcher sich in dem Sinne AB, den wir als den positiven annehmen wollen, von A aus auf dem Kreisumfange bewegt. Im Anfange der Bewegung ist der Bogen AM $= 0$, wird hierauf größer und $= 2\pi$, wenn der bewegliche Punkt wieder nach A gelangt, wovon er ausging. Man kann sich aber vorstellen: daß der Punkt M seine Bewegung weiter fortsetzt, und einen Kreisbogen beschreibt, welcher mehrere ganze Umfänge enthält.

Wenn sich der Punkt M in einem dem vorigen entgegengesetzten Sinne bewegt, so ist der beschriebene Bogen negativ; aber sein absoluter Werth kann alle Größenzustände durchlaufen.

Ein Kreisbogen, d. h. die ihn messende Zahl, kann also alle Werthe zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen.

§. 5. Der feste Endpunkt A eines veränderlichen Kreisbogens AM wird in der Folge oft der Anfangspunkt dieses Bogens genannt werden.

Wenn α den Bogen AM bezeichnet, so wird jeder andere Bogen x, welcher denselben Endpunkt M hat, ausgedrückt durch:

$$x = 2k\pi + \alpha,$$

wo k irgend eine ganze Zahl bezeichnet, welche positiv, null, oder negativ sein kann. — Denn wenn x positiv ist, so muß man zuerst von A nach M übergehen, und dann nöthigenfalls noch irgend eine Anzahl ganzer Kreisumfänge durchlaufen, um den Bogen x zu beschreiben. Wenn aber der Bogen x negativ ist, so muß man zuerst den Bogen $-(2\pi - \alpha) = -2\pi + \alpha$ durchlaufen, um von A nach M zu kommen, und dann noch irgend eine negative ganze Anzahl von Kreisumfängen hinzufügen, wenn es erforderlich ist. —

§. 6. Complementarbogen. — Zwei Kreisbogen, wovon jeder positiv, oder der eine positiv und der andere negativ ist, und deren Summe einen Quadranten oder $\frac{\pi}{2}$ beträgt, heißen Complementarbogen von einander, so daß man den einen das Complement des andern nennt.

Wenn A (Fig. 3) der Anfangspunkt der Bogen ist, und man zieht die beiden auf einander senkrechten Durchmesser AA′, BB′ und nimmt AB als den Sinn der positiven Bogen, B als einen neuen Anfangspunkt der Bogen und BA als den Sinn der zuge-

hörigen positiven Bogen; so haben zwei Complementarbogen, deren resp. Anfangspunkte **A**, **B** sind, denselben Endpunkt **M**.

Denn es sei x ein positiver, oder negativer Bogen, dessen Anfangspunkt **A** und dessen Endpunkt **M** ist, so ist das Complement desselben $= \frac{\pi}{2} - x$. Da ferner nach der Voraussetzung **B** der Anfangspunkt dieses Complementes ist, so geht man, um den Bogen $\frac{\pi}{2} - x$ zu beschreiben, zuerst von **B** nach **A**, und von **A** aus ist alsdann noch der Bogen $- x$ zu beschreiben, indem **BA** der Sinn der positiven Bogen ist, oder der Bogen x, wenn **AB** der Sinn der positiven Bogen ist. Auf diese Weise kommt man aber offenbar wieder auf denselben Punkt **M**, w. b. w. s.

§. 7. Supplementarbogen. — Zwei Bogen, wovon jeder positiv, oder der eine positiv und der andere negativ ist, heißen Supplementarbogen oder der eine heißt das Supplement des andern, wenn ihre Summe $= \pi$, d. h. dem halben Kreisumfange gleich ist.

§. 8. Sinus. — Es sei **A** (Fig. 3) der Anfangspunkt der Bogen und **AB** der Sinn der positiven Bogen. Ferner sei der Durchmesser **BB'** senkrecht auf dem Durchmesser **AA'** und x sei die positive, oder negative Zahl, welche den Bogen mißt, dessen Endpunkt **M** auf dem Kreisumfange alle möglichen Lagen annehmen kann, und endlich sei **MP** senkrecht auf **AA'**; so ist nach §. 3. das Perpendikel **MP** als positiv, oder als negativ zu betrachten, je nachdem der Punkt **M** auf dem Halbkreise **ABA'**, oder auf dem Halbkreise **A'B'A** liegt. Die positive, oder negative Zahl, welche dieses Perpendikel **MP** mißt, wird der Sinus des Bogens x genannt. —

Man kann also folgende Definition aufstellen:

„Der Sinus eines Bogens ist die positive, oder negative Zahl, welche das aus dem Endpunkte dieses Bogens auf den durch seinen Anfangspunkt gehenden Durchmesser gefällte Perpendikel mißt."

Wenn y den Sinus des veränderlichen Bogens x bezeichnet, so wollen wir schreiben:

$$y = \sin x,$$

welches die erste der in §. 1. erwähnten Kreisfunktionen ist.

§. 9. Veränderung des Sinus. — Untersuchen wir nun, wie sich die Funktion sin x ändert, wenn man den Bogen x sich ändern läßt.

Wenn x von o bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, so nimmt sin x von o bis 1 zu, indem derselbe alle zwischenliegenden Größenzustände durchläuft. Wenn x von $\frac{\pi}{2}$ bis π zunimmt, so nimmt sin x von 1 bis o ab, indem er wieder alle Zwischenwerthe durchläuft. — Der sin x erhält also für $x = \frac{\pi}{2}$ sein Maximum (größten Werth), indem der Bogen x von o bis π wächst.

Wenn x von π bis $\frac{3\pi}{2}$ wächst, so ist sin x negativ und nimmt fortwährend von o bis — 1 ab; und wenn endlich x von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π zunimmt; so ist sin x wieder negativ und wächst von — 1 bis o. Läßt man x weiter von 2π bis 4π, oder von 4π bis 6π, ꝛc. wachsen, so nimmt sin x periodisch wieder dieselben Werthe und in derselben Ordnung an. Wenn x von o bis $-\infty$ abnimmt, so nimmt sin x, abgesehen vom Zeichen, dieselben Werthe an, als wenn x von o bis $+\infty$ zunimmt; d. h. man hat für jeden Werth von x:

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

weil die Endpunkte der beiden gleichen und entgegengesetzten Bogen von dem Durchmesser A'A gleichweit entfernt sind und auf entgegengesetzten Seiten desselben liegen.

Nach dem Vorhergehenden ist also:

$$\sin o = o,\ \sin\frac{\pi}{2} = +1,\ \sin\pi = o,\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1,\ \sin 2\pi = o,$$

$$(1)\qquad \sin(-x) = -\sin x,$$
$$\sin(2k\pi + x) = \sin x.$$

Aus dieser letzten Gleichung, worin k irgend eine ganze Zahl bezeichnet, welche positiv, null, oder negativ sein kann, sieht man: daß sich die Funktion sin x nicht ändert, wenn der Bogen x um 2π vergrößert, oder verkleinert wird, und man sagt deshalb: sin x sei eine periodische Funktion, deren Periode $= 2\pi$ ist.

§. 10. Wenn x irgend ein positiver, oder negativer Bogen ist,

so liegen die Endpunkte der beiden Bogen x, $x + \pi$ offenbar in den Endpunkten desselben Durchmessers; folglich sind ihre Sinus gleich und von entgegengesetztem Zeichen. Man hat also:

$$(2) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x.$$

Die Funktion $\sin x$ ändert also blos ihr Zeichen, wenn der Bogen x um eine halbe Periode π zunimmt.

Da die letzte Gleichung für jeden Werth von x stattfindet, so kann man x in $-x$ umsetzen, und alsdann erhält man:

$$\sin(\pi - x) = -\sin(-x),$$

oder wegen (1):

$$(3) \qquad \sin(\pi - x) = \sin x;$$

d. h. zwei Supplementarbogen haben gleiche Sinus. —

Da sich der Sinus eines Bogens nicht ändert, wenn man irgend ein Vielfaches $2k\pi$ von 2π zu diesem Bogen addirt; so ergeben sich aus den Gleichungen (2), (3) die folgenden:

$$\sin[(2k+1)\pi + x] = -\sin x,$$
$$\sin[(2k+1)\pi - x] = \sin x,$$

welche für jeden Werth von x gelten.

§. 11. Es sei AM (Fig. 3) ein kleinerer Bogen als der Halbkreis, so ist sein Sinus MP positiv, und wenn man denselben bis zum Durchschneiden in M‴ mit dem Kreisumfange verlängert; so ist die Sehne MPM‴ das Doppelte des Sinus MP und der zu dieser Sehne gehörige Bogen ebenfalls das Doppelte des Bogens AM. —

Es ist also der Sinus eines kleinern Bogens als der Halbkreis der Hälfte der Sehne des doppelten Bogens gleich. —

So ist z. B. die Seite des in den Kreis von dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen regelmäßigen n-Eckes $= 2 \sin \frac{\pi}{n}$.

Da ferner die Seite des in denselben Kreis beschriebenen Quadrates $= \sqrt{2}$ ist, so hat man nach dem Vorhergehenden:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da die Seite des regelmäßigen Sechseckes $= 1$ ist, so hat man:

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Desgleichen, da die Seite des in den Kreis von dem Halbmesser = 1 beschriebenen regelmäßigen Dreieckes = $\sqrt{3}$ ist, so ist auch:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Da endlich die Seite des in denselben Kreis beschriebenen regelmäßigen Zehneckes = $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ist, so ist folglich:

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

§. 12. Tangente. — Es sei wieder A (Fig. 3) der Anfangspunkt der Bogen und AB der Sinn der positiven Bogen; x bezeichne wieder den veränderlichen Bogen, dessen Endpunkt M sich auf dem Kreisumfange bewegt; yy′ sei eine Tangente im Punkte A und AT der Theil derselben, welcher zwischen dem Anfangspunkte A des Bogens x und dem durch seinen Endpunkt M gehenden verlängerten Durchmesser OM liegt. Nach §. 3. werden die Längen AT als positiv, oder negativ betrachtet, je nachdem sie in dem Sinne Ay, oder in dem entgegengesetzten Sinne Ay′ genommen sind, und Tangente des Bogens x soll die positive, oder negative Zahl heißen, welche die Länge AT mißt.

Hiernach ist also + AT die Tangente der Bogen, deren Endpunkt in M oder M″ liegt, und — AT′ die Tangente der Bogen, welche ihren Endpunkt in M′ oder M‴ haben. Wir können also folgende Definition aufstellen:

„Die Tangente eines Bogens ist die positive, oder negative Zahl, welche den Theil der durch den Anfangspunkt des Bogens gezogenen geometrischen Tangente mißt, der zwischen diesem Anfangspunkte und dem durch den Endpunkt des Bogens gehenden Durchmesser liegt."

Wenn y die Tangente des Bogens x bezeichnet, so wollen wir schreiben:

$$y = \text{tang } x,$$

welches die zweite der in §. 1. erwähnten Kreisfunktionen ist. —

§. 13. Veränderung der Tangente. — Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Funktion y = tang x ändert, wenn sich der Bogen x von $-\infty$ bis $+\infty$ ändert. —

Wenn x von o bis $\frac{\pi}{2}$ zunimmt, so wächst tang x von o aus und kann größer werden, als jede gegebene Zahl. Wenn x von $\frac{\pi}{2}$ bis π wächst, so ist tang x negativ, und wächst von $-\infty$ bis o. Wenn x von π bis $\frac{3\pi}{2}$ zunimmt, so wird tang x wieder positiv, und wächst von o bis $+\infty$. Wenn endlich x von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π wächst, so ist tang x negativ, und wächst von $-\infty$ bis o. Wenn man x von 2π bis 4π, oder von 4π bis 6π, ꝛc. wachsen läßt; so nimmt tang x periodisch dieselben Werthe und in derselben Ordnung wieder an. Wenn x sich von o bis $-\infty$ ändert, so nimmt tang x, abgesehen vom Zeichen, dieselben Werthe an, als wenn sich x von o bis $+\infty$ ändert; d. h. es ist für jeden Werth von x:

(1) $$\operatorname{tang}(-x) = -\operatorname{tang} x;$$

denn die Endpunkte der beiden gleichen und entgegengesetzten Bogen x, — x sind von dem Durchmesser AA′ gleichweit entfernt und liegen auf derselben Seite von BB′. Die Tangenten dieser beiden Bogen sind also einander gleich, und von entgegengesetztem Zeichen.

Wenn also ε einen unendlich kleinen positiven Bogen bezeichnet, so hat man nach dem vorhin Gesagten:

$$\operatorname{tang} 0 = 0,\ \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty,\ \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty,$$

$$\operatorname{tang} \pi = 0,\ \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty,\ \operatorname{tang}\left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty,$$

$$\operatorname{tang} 2\pi = 0,$$

$$\operatorname{tang}(-x) = -\operatorname{tang} x,$$

$$\operatorname{tang}(2k\pi + x) = \operatorname{tang} x,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

§. 14. Es sei x ein beliebiger positiver, oder negativer Bogen, so liegen die Endpunkte der beiden Bogen x, $x + \pi$ in den Endpunkten desselben Durchmessers; folglich sind ihre Tangenten gleich, und man hat:

$$\operatorname{tang}(\pi + x) = \operatorname{tang} x.$$

Die Funktion tang x ändert sich also nicht, wenn man den Bogen x um π vermehrt, sie ist folglich eine periodische Funktion und ihre Periode $= \pi$.

Wenn man in der letzten Gleichung x in — x umsetzt, so hat man:

$$\text{tang}\,(\pi - x) = \text{tang}\,(-x),$$

also wegen (1):

$$\text{tang}\,(\pi - x) = -\,\text{tang}\,x.$$

Zwei Supplementarbogen haben also gleiche Tangenten mit entgegengesetzten Zeichen.

Da die Tangente eines Bogens sich nicht ändert, wenn π zu demselben addirt wird, so folgt aus den vorhergehenden Formeln:

$$\text{tang}\,(k\,\pi + x) = \text{tang}\,x,$$
$$\text{tang}\,(k\,\pi - x) = -\,\text{tang}\,x,$$

wo k eine beliebige *ganze* Zahl bedeutet, welche positiv, null, oder negativ sein kann.

§. 15. Die Seite des um den Kreis von dem Halbmesser = 1 beschriebenen regelmäßigen n-*Eckes* ist offenbar gleich:

$$2\ \text{tang}\,\frac{\pi}{n},$$

und da man die Seite des um den Kreis beschriebenen regelmäßigen *Viereckes*, *Sechseckes* und *Dreieckes* geometrisch finden kann; so kann man auch die Werthe von tang $\frac{\pi}{4}$, tang $\frac{\pi}{6}$, tang $\frac{\pi}{3}$ finden, nämlich:

$$\text{tang}\,\frac{\pi}{4} = 1,$$
$$\text{tang}\,\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},$$
$$\text{tang}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

§. 16. *Sekante.* — Es sei A (Fig. 3) wieder der Anfangspunkt der Bogen, AB der Sinn der positiven Bogen, x der veränderliche Bogen, dessen Anfangspunkt A ist, und MK die an seinen Endpunkt M gezogene Tangente, welche den Durchmesser AA′ in K schneidet; so sind nach §. 2. die Längen OK als positiv, oder negativ zu betrachten, je nachdem sie in dem Sinne OA, oder in dem entgegengesetzten Sinne genommen sind. Die positive, oder negative Zahl, welche die Länge OK mißt, heißt die *Sekante* des Bogens x. Die Bogen, welche ihren Endpunkt in M oder M‴ haben, haben also + OK und die, welche ihren Endpunkt in M′

oder M″ haben, haben — OK′ zur Sekante. Man hat folglich die allgemeine Definition:

„Die Sekante eines Bogens ist die positive, oder negative Zahl, welche den Theil des durch den Anfangspunkt der Bogen gehenden Durchmessers mißt, der zwischen dem Mittelpunkte des Kreises und der an den Endpunkt des Bogens gezogenen Tangente liegt.“

Wenn y die Sekante des Bogens x bezeichnet, so wollen wir setzen:

$$y = \sec x,$$

welches die dritte der in §. 1. erwähnten Kreisfunktionen ist.

§. 17. Veränderung der Sekante. — Untersuchen wir nun, wie sich die Funktion sec x ändert, wenn sich der Bogen x von $-\infty$ bis $+\infty$ ändert.

Wenn x von o bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, so nimmt sec x von 1 an zu, und kann größer werden, als jede gegebene Zahl. Wenn x von $\frac{\pi}{2}$ bis π zunimmt, so ist sec x negativ und wächst von $-\infty$ bis -1. Wächst x von π bis $\frac{3\pi}{2}$, so ist sec x noch negativ und nimmt ab von -1 bis $-\infty$. Wenn endlich x von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π wächst, so ist sec x positiv und nimmt von $+\infty$ bis $+1$ ab. — Wenn man x von 2π bis 4π, oder von 4π bis 6π, rc. zunehmen läßt; so nimmt sec x periodisch und in derselben Ordnung dieselben Werthe wieder an. — Wenn x von o bis $-\infty$ abnimmt, so nimmt sec x genau dieselben Werthe wieder an, als wenn x von o bis $+\infty$ zunimmt, d. h. man hat für jeden Werth von x:

(1) $$\sec(-x) = \sec x;$$

denn die Endpunkte zweier gleicher und entgegengesetzter Bogen liegen in gleicher Entfernung von dem Durchmesser AA′ und auf derselben Seite von BB′, und die in diesen Endpunkten gezogenen Tangenten schneiden sich auf AA′; folglich haben die beiden Bogen gleiche Sekanten. —

Bezeichnet ε wieder einen unendlich kleinen Bogen, so ist nach dem Gesagten:

$\sec o = +1$, $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty$, $\sec\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty$,

$\sec \pi = -1$, $\sec\left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = -\infty$, $\sec\left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right) = +\infty$,

$$\sec 2\pi = +1,$$

$$\sec(-x) = \sec x,$$

$$\sec(2k\pi + x) = \sec x,$$

wo k eine beliebige ganze positive, oder negative Zahl bedeutet. Aus der letzten Gleichung erhellet: daß sec x eine periodische Funktion von der Periode 2π ist.

§. 18. Es sei x ein positiver, oder negativer Bogen, so liegen die Endpunkte der beiden Bogen x, $x + \pi$ in den Endpunkten desselben Durchmessers; die in diesen Endpunkten an den Kreis gezogenen Tangenten sind parallel und gleichweit vom Mittelpunkte entfernt, treffen also den Durchmesser AA′ in zwei Punkten, welche auf entgegengesetzten Seiten des Mittelpunktes liegen und gleichweit davon entfernt sind, und folglich sind die Sekanten dieser beiden Bogen einander gleich und von entgegengesetztem Zeichen. Es ist also:

(2) $$\sec(\pi + x) = -\sec x,$$

woraus erhellet: daß die Funktion sec x blos das Zeichen ändert, wenn x um eine halbe Periode π zunimmt. —

Wenn man in (2), — x für x setzt, so kommt:

$$\sec(\pi - x) = -\sec(-x),$$

also wegen (1):

(3) $$\sec(\pi - x) = -\sec x;$$

folglich haben zwei Supplementarbogen gleiche und entgegengesetzte Sekanten. —

Da sich die Sekante eines Bogens nicht ändert, wenn man denselben um ein Vielfaches von 2π vermehrt, so ergibt sich aus (2), (3):

$$\sec[(2k + 1)\pi \pm x] = -\sec x,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. —

§. 19. Cosinus, Cotangente und Cosekante. — Unter dem Cosinus, der Cotangente und der Cosekante eines Bogens versteht man resp. den Sinus, die Tangente und Sekante seines Complementes. —

Es sei wieder A (Fig. 3) der Anfangspunkt der Bogen, AB der Sinn der positiven Bogen und x ein beliebiger Bogen, dessen Endpunkt M ist. Um den Cosinus, die Cotangente und Cosekante des Bogens x zu erhalten, muß man resp. den Sinus, die Tangente und Sekante des Bogens $\frac{\pi}{2} - x$ nehmen, dessen Anfangs- und Endpunkt resp. B und M ist, und BA der Sinn der positiven Bogen. — Wenn man folglich vom Punkte M resp. auf BB′ und AA′ die Perpendikel MQ, MP zieht, so ist wegen MQ = OP, cos x gleich + OP, oder gleich — OP, je nachdem der Punkt P auf OA, oder auf deren Verlängerung OA′ liegt. — Desgleichen, wenn man in B die Tangente ZZ′ und den Halbmesser OM zieht, welcher ZZ′ in S schneidet, so ist cot x gleich + BS, oder gleich — BS, je nachdem der Punkt S mit A auf derselben Seite von BB′, oder auf der entgegengesetzten Seite liegt. Wenn endlich H der Punkt ist, wo die an M gezogene Tangente den Durchmesser BB′ trifft; so ist cosec x gleich + OH, oder gleich — OH, je nachdem der Punkt H auf OB, oder auf OB′ liegt. —

§. 20. Veränderung des Cosinus, der Cotangente und Cosekante. — Aus der Figur, oder aus den Gleichungen:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\cot x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$\operatorname{cosec} x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

erhellet sofort: Wenn x von o bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, so nimmt cos x von 1 bis o, cot x von $+\infty$ bis o und cosec x von $+\infty$ bis $+1$ ab. — Wenn x von $\frac{\pi}{2}$ bis π zunimmt, so ist cos x und cot x negativ, aber cosec x bleibt positiv; cos x nimmt von o bis -1 und cot x von o bis $-\infty$ ab; aber cosec x wächst von $+1$ bis $+\infty$.

Wenn x von π bis $\frac{3\pi}{2}$ zunimmt, so bleibt cos x negativ, aber cot x wird positiv und cosec x negativ; cos x wächst von -1 bis o, cot x nimmt ab von $+\infty$ bis o und cosec x nimmt zu von $-\infty$ bis -1.

Wenn x von $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π zunimmt, so wird cos x positiv und cot x, wie cosec x negativ; cos x wächst von o bis + 1, cot x nimmt von o bis $-\infty$ und cosec x von -1 bis $-\infty$ ab.

Wenn x von 2π bis 4π, oder von 4π bis 6π, 2c. wächst, so nehmen cos x, cot x, cosec x periodisch und in derselben Ordnung dieselben Werthe wieder an. Wenn sich endlich x von o bis $-\infty$ ändert, so nimmt cos x dieselben Werthe wieder an, als wenn sich x von o bis $+\infty$ ändert, und cot x, cosec x nehmen auch dieselben Werthe, aber mit entgegengesetztem Zeichen an; d. h. man hat für jeden Werth von x:

$$\cos(-x) = \cos x,$$
$$\cot(-x) = -\cot x,$$
$$\operatorname{cosec}(-x) = -\operatorname{cosec} x.$$

Wenn ε wieder einen unendlich kleinen Bogen bezeichnet, so ist nach dem Obigen:

$$\cos o = 1, \cos\frac{\pi}{2} = o, \cos\pi = -1, \cos\frac{3\pi}{2} = o, \cos 2\pi = 1;$$

$$\cot\varepsilon = +\infty, \cot\frac{\pi}{2} = o, \cot(\pi-\varepsilon) = -\infty, \cot(\pi+\varepsilon) = +\infty,$$

$$\cot\frac{3\pi}{2} = o, \cot(2\pi-\varepsilon) = -\infty;$$

$$\operatorname{cosec}\varepsilon = +\infty, \operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = +1, \operatorname{cosec}(\pi-\varepsilon) = +\infty, \operatorname{cosec}(\pi+\varepsilon) = -\infty,$$

$$\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2} = -1, \operatorname{cosec}(2\pi-\varepsilon) = -\infty;$$

$$\cos(2k\pi + x) = \cos x,$$
$$\cot(2k\pi + x) = \cot x,$$
$$\operatorname{cosec}(2k\pi + x) = \operatorname{cosec} x.$$

Die drei letzten Gleichungen, worin k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, lehren: daß cos x, cot x und cosec x periodische Funktionen sind, deren Periode $= 2\pi$ ist. —

§. 21. Aus den Gleichungen (1) und den in §§. 10, 14, 18. gefundenen folgt: daß man für jeden Werth von x hat:

$$\cos(\pi + x) = -\cos x,$$
$$\cot(\pi + x) = \cot x,$$
$$\operatorname{cosec}(\pi + x) = -\operatorname{cosec} x,$$

woraus erhellet: daß cos x und cosec x nur ihr Zeichen ändern, wenn x um eine halbe Periode π zunimmt, während cot x sich nicht ändert, und folglich die Periode π hat.

Wenn man in den vorhergehenden Formeln x in — x umsetzt, so erhält man:

$$\cos(\pi - x) = -\cos(-x) = -\cos x,$$
$$\cot(\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x,$$
$$\operatorname{cosec}(\pi - x) = -\operatorname{cosec}(-x) = \operatorname{cosec} x,$$

woraus man sieht: daß zwei Supplementarbogen gleiche Cosekanten haben, und daß ihre Cosinus und Cotangenten gleich und von entgegengesetztem Zeichen sind.

Aus den vorhergehenden Gleichungen ergibt sich ferner leicht:

$$\cot(k\pi \pm x) = \pm \cot x,$$
$$\cos[(2k+1)\pi \pm x] = -\cos x,$$
$$\operatorname{cosec}[(2k+1)\pi \pm x] = \mp \operatorname{cosec} x,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. —

§. 22. Reduktion der Bogen auf den ersten Quadranten. — Die bisher betrachteten sechs Kreisfunktionen werden wegen ihres Gebrauches in der eigentlichen Trigonometrie, welche sich mit der Auflösung der Dreiecke, d. h. mit der Berechnung der Seiten und Winkel eines Dreieckes beschäftigt, wenn die zur Bestimmung desselben erforderlichen Stücke gegeben sind, auch trigonometrische Linien genannt, und es ist wohl zu bemerken: daß jede trigonometrische Linie eines Bogens x alle Werthe, deren sie bei unbeschränkter Veränderung von x fähig ist, annimmt, wenn man x sich nur innerhalb zweier Quadranten ändern läßt. Wenn sich z. B. x von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ ändert, so nehmen sin x, tang x, cot x und cosec x alle Werthe an, deren sie überhaupt fähig sind, und wenn sich x von o bis π ändert; so nehmen cos x, tang x, cot x und sec x alle Werthe an, welche sie überhaupt annehmen können. — Wenn man endlich nur auf die absoluten Werthe sieht, so nehmen die sechs trigonometrischen Linien alle Werthe an, welche sie überhaupt bekommen können, wenn sich der Bogen x von o bis $\frac{\pi}{2}$, oder von $\frac{\pi}{2}$ bis π, 2c. ändert. —

Wenn ein beliebiger Bogen x gegeben ist, so ist es oft nöthig, den zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen zu finden, welcher, abge-

sehen vom Zeichen, dieselben trigonometrischen Linien hat, als der Bogen x. — Diese Operation wird die Reduktion eines Bogens auf den ersten Quadranten genannt. Zu dem Zwecke zieht man von dem Bogen x das größte Vielfache von π ab, welches darin enthalten ist, so daß der positive, oder negative Rest $\pm \alpha$ dem absoluten Werthe nach kleiner ist als π. Alsdann ist:

$$x = k\,\pi \pm \alpha,$$

und der Bogen α hat, abgesehen vom Zeichen, dieselben trigonometrischen Linien als x. Denn wenn $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, so ist die Aufgabe gelöst; aber wenn $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ist, so nimmt man das Supplement $\pi - \alpha$, welches kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, und, abgesehen vom Zeichen, dieselben trigonometrischen Linien hat, als der Bogen x. — Hieraus folgt: daß jeder positive, oder negative Bogen auf die Form $(\pm \alpha \pm k\,\pi)$ gebracht werden kann, und man kann mithin setzen:

$$\sin(\pm \alpha \pm k\,\pi) = (-1)^k \sin(\pm \alpha),$$
$$\cos(\pm \alpha \pm k\,\pi) = (-1)^k \cos(\pm \alpha),$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Sind also die trigonometrischen Linien aller Bogen oder Winkel von o bis $\frac{\pi}{2}$ bekannt, so kann man auch die jedes beliebigen Bogens oder Winkels leicht finden.

Ausdrücke der Bogen, welche einer gegebenen trigonometrischen Linie entsprechen.

§. 23. Aus dem Vorhergehenden erhellet: daß jedem zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegenden Werthe eines Bogens ein einziger, völlig bestimmter Werth jeder seiner trigonometrischen Linien entspricht, während demselben gegebenen Werthe jeder dieser trigonometrischen Linien unendlich viele Bogen entsprechen, und wir wollen nun die Aufgabe lösen: „Wenn man einen der Bogen kennt, welche einer gegebenen trigonometrischen Linie entsprechen, alle übrigen zu finden.“ —

§. 24. Ausdruck der Bogen, welche einen gegebenen Sinus A haben. — Es sei A (Fig. 3) der Anfangspunkt der

Bogen, und AA′, BB′ seien zwei auf einander senkrechte Durchmesser. Wir wollen die Zahl A zuerst als positiv voraussetzen, auf OB eine Länge OQ = A nehmen und durch den Punkt Q die Gerade MM′ parallel zu AA′ ziehen; so sind M, M′ die Endpunkte der Bogen, deren Sinus = A ist. Es bezeichne α den zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ liegenden dieser Bogen, d. h. den Bogen AM; so werden alle Bogen, welche denselben Endpunkt M haben, ausgedrückt durch:

$$2\,k\,\pi + \alpha,$$

wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Da ferner der zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π liegende Bogen AMM′ gleich $\pi - \alpha$ ist, so werden alle Bogen, deren Endpunkt M′ ist, ausgedrückt durch:

$$2\,k\,\pi + (\pi - \alpha) \text{ oder } (2\,k + 1)\,\pi - \alpha.$$

Hieraus folgt: Alle Werthe von x, für welche sin x = A ist, werden ausgedrückt durch:

$$x = 2\,k\,\pi + \alpha, \text{ oder } x = (2\,k + 1)\,\pi - \alpha,$$

wo k eine unbestimmte ganze Zahl, die positiv, null, oder negativ sein kann, und α den kleinsten positiven Bogen bedeutet, dessen Sinus = A ist.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn A negativ ist. — Denn nimmt man in diesem Falle auf OB′ eine Länge OQ′ = — A, zieht durch den Punkt Q′ die Gerade M′M″ parallel zu OA und bezeichnet den zwischen π und $\frac{3\pi}{2}$ liegenden Bogen AMM′M″ mit α; so ist offenbar der zwischen $\frac{3\pi}{2}$ und $2\,\pi$ liegende Bogen AMM′M″M‴ $= 3\,\pi - \alpha$. Folglich werden die sich resp. in M″ und M‴ endigenden Bogen ausgedrückt durch:

$$2\,k\,\pi + \alpha,\ 2\,k\,\pi + 3\,\pi - \alpha \text{ oder } (2\,k + 1)\,\pi - \alpha,$$

wie in dem Falle, wo A positiv ist.

Hieraus folgt also: Wenn x und a zwei Bogen bezeichnen, welche denselben Sinus A haben und durch dieselbe Formel ausgedrückt werden; so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\,k\,\pi + \alpha, \\ a = 2\,k'\,\pi + \alpha \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} x = (2\,k + 1)\,\pi - \alpha, \\ a = (2\,k' + 1)\,\pi - \alpha. \end{array}\right.$$

Die Differenz x — a ist also eine ganze Anzahl von Kreisumfängen.

Werden dagegen x und a durch verschiedene Formeln ausgedrückt, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\,k\,\pi + \alpha, \\ a = (2\,k' + 1)\,\pi - \alpha \end{array}\right\} \text{ oder } \left\{\begin{array}{l} x = (2\,k + 1)\,\pi - \alpha, \\ a = 2\,k'\,\pi + \alpha, \end{array}\right.$$

und alsdann ist die Summe x + a eine ungerade Anzahl halber Kreisumfänge. Hieraus und aus §§. 9. und 10. fließt also folgender Satz:

Sollen zwei Bogen denselben Sinus haben, so ist erforderlich, aber auch zureichend: daß ihre **Summe eine ungerade**, und ihre **Differenz** eine **gerade** Anzahl halber Kreisumfänge beträgt. —

Man kann dieses Resultat auch dadurch ausdrücken, daß man sagt: die Gleichung:

$$\sin x = \sin a$$

hat unendlich viele Wurzeln, welche durch die Formeln:

$$x = 2\,k\,\pi + a,\; x = (2\,k + 1)\,\pi - a$$

gegeben werden, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

§. 25. Ausdruck der Bogen, welche einen gegebenen Cosinus A haben. —

Es seien x und α zwei Bogen, welche den gegebenen Cosinus haben, so haben die Complemente $\frac{\pi}{2} - x$ und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ denselben Sinus; ihre Summe beträgt also eine ungerade, oder ihre Differenz eine gerade Anzahl halber Kreisumfänge, und folglich ist:

$$x = 2\,k\,\pi \pm \alpha.$$

§. 26. Ausdruck der Bogen, welche eine gegebene Tangente A haben. — Zieht man durch den Punkt A (Fig. 3) die geometrische Tangente yy', nimmt auf Ay eine Länge AT = A, wenn A positiv ist, oder auf AT' eine Länge AT' = — A, wenn A negativ ist, und zieht den Durchmesser OT, oder OT'; so sind die Punkte M und M'', oder M' und M''', wo dieser Durchmesser den Kreisumfang trifft, die Endpunkte der Bogen, welche A zur Tangente haben. — Bezeichnet α den kleinsten positiven Bogen, dessen Endpunkt M oder M' ist, so ist der Bogen, dessen Endpunkt M'' oder M''' ist, gleich $\pi + \alpha$.

Die Bogen, deren Tangente = A ist, werden also ausgedrückt durch:

$$2\,k\,\pi + \alpha,\; (2\,k + 1)\,\pi + \alpha,$$

oder durch:

$$k\pi + \alpha,$$

wo k wieder irgend eine ganze Zahl, die positiv, null, oder negativ sein kann, und α den kleinsten der positiven Bogen bezeichnet, deren Tangente = A ist. —

Wenn x und a zwei Bogen bezeichnen, welche dieselbe Tangente A haben, so ist:

$$x = k\pi + \alpha, \; a = k'\pi + \alpha,$$

woraus in Verbindung mit §. 14. folgt:

Sollen zwei Bogen dieselbe Tangente haben, so ist erforderlich, aber auch hinreichend: daß ihre Differenz ein Vielfaches des halben Kreisumfanges sei. —

Man kann auch sagen: daß die Gleichung:

$$\tang x = \tang a$$

unendlich viele Wurzeln hat, welche durch:

$$x = k\pi + a$$

gegeben werden, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. —

§. 27. Ausdruck der Bogen, welche eine gegebene Cotangente A haben. — Es seien x und α zwei Bogen, welche die gegebene Cotangente haben, so haben die Complemente $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ dieselbe Tangente, ihre Differenz beträgt also eine ganze Anzahl halber Kreisumfänge, und folglich ist:

$$x = k\pi + \alpha.$$

§. 28. Ausdruck der Bogen, welche eine gegebene Sekante A haben. — Nimmt man auf OA (Fig. 3) eine Länge OK = A, wenn A positiv ist, oder auf OA′ eine Länge OK′ = — A, wenn A negativ ist, und zieht durch den Punkt K oder K′ zwei Tangenten an den Kreis; so sind die Berührungspunkte M und M‴, oder M′ und M″ die Endpunkte der Bogen, welche die gegebene Sekante A haben. — Bezeichnet α den kleinsten der positiven Bogen, deren Endpunkt M oder M′ ist, so wird der Bogen, dessen Endpunkt M‴ oder M″ ist, durch $2\pi - \alpha$ ausgedrückt.

Zwei Bogen, welche dieselbe Sekante A haben, werden also ausgedrückt durch:

$$2k\pi + \alpha, \; 2k\pi - \alpha,$$

oder durch:

$$2k\pi \pm \alpha,$$

wo k wieder irgend eine ganze Zahl und α den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, dessen Sekante = A ist.

Sollen also zwei Bogen dieselbe Sekante haben, so ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß ihre Summe, oder Differenz ein Vielfaches des Kreisumfanges sei.

§. 29. Ausdruck der Bogen, deren Cosekante eine gegebene Größe A ist.

Es seien x und α zwei Bogen, welche die gegebene Cosekante haben, so haben die Complemente $\frac{\pi}{2} - x$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$ dieselbe Sekante; folglich ist ihre Summe, oder Differenz ein Vielfaches des halben Kreisumfanges, und mithin:

$$x = 2\,k\,\pi + \alpha, \text{ oder } x = (2\,k + 1)\,\pi - \alpha.$$

Inverse Kreisfunktionen — cyclometrische Funktionen.

§. 30. Wenn man setzt:

$$y = \sin x, \text{ oder } y = \operatorname{tang} x, \text{ oder } y = \sec x, \text{ ꝛc.}$$

so pflegt man auch zu schreiben:

$$x = \operatorname{arc} \sin (y), \text{ oder } x = \operatorname{arc} \operatorname{tang} (y), \text{ oder } x = \operatorname{arc} \sec (y), \text{ ꝛc.}$$

d. h. x = dem Bogen, dessen Sinus = y ist, ꝛc. und man kann offenbar x als eine Funktion von sin x, tang x, sec x, ꝛc. betrachten, nur ist diese Funktion nicht vollständig bestimmt. — So hat z. B. arc sin (y) für denselben Werth von y unendlich viele Werthe; allein diese Funktion hat einen ganz bestimmten Werth, sobald festgesetzt wird: daß der Bogen x zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$ liegen soll. —

Die 6 Funktionen:

arc sin(y), arc tang(y), arc sec(y), arc cos(y), arc cot(y), arc cosec(y)

werden inverse Kreisfunktionen oder auch cyclometrische Funktionen genannt, und in den höhern Zweigen der Mathematik oft angewandt. —

Wenn y = sin x, also x = arc sin (y) ist, so ist unter Beibehaltung der frühern Bezeichnung (§. 24.):

$$x = \operatorname{arc} \sin(y) = 2\,k\,\pi + \alpha, \text{ oder } x = \operatorname{arc} \sin(y) = (2\,k + 1)\,\pi - \alpha.$$

Wenn y = cos x, also x = arc cos (y) ist, so hat man (§. 25.):

$$x = \operatorname{arc} \cos (y) = 2\,k\,\pi \pm \alpha.$$

Wenn $y = \tang x$, also $x = \text{arc tang}(y)$ ist; so ist nach §. 26.:

$$x = \text{arc tang}(y) = k\pi + \alpha.$$

Wenn $y = \cotg x$, also $x = \text{arc cotg}(y)$ ist; so ist nach §. 27. allgemein:

$$x = \text{arc cotg}(y) = k\pi + \alpha.$$

Wenn $y = \sec x$, also $x = \text{arc sec}(y)$ ist; so ist (§. 28.):

$$x = \text{arc sec}(y) = 2k\pi \pm \alpha.$$

Wenn $y = \text{cosec}\, x$ ist, also $x = \text{arc cosec}(y)$; so ist nach §. 29.:

$x = \text{arc cosec}(y) = 2k\pi + \alpha$, oder $x = \text{arc cosec}(y) = (2k+1)\pi - \alpha$.

Ferner ist allgemein:

$$\text{arc cos}(y) = \frac{\pi}{2} - \text{arc sin}(y),$$

$$\text{arc cotg}(y) = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}(y),$$

$$\text{arc cosec}(y) = \frac{\pi}{2} - \text{arc sec}(y).$$

Wenn $y = \sin x$, also $x = \text{arc sin}(y)$ ist; so ist auch:

$$\sin(-x) = -\sin x = -y, \text{ also } -x = \text{arc sin}(-y),$$

oder:

$$-\text{arc sin}(y) = \text{arc sin}(-y) = \alpha - (2k+1)\pi, \text{ oder } = -\alpha \pm 2k\pi.$$

Ebenso ergibt sich:

$$-\text{arc tang}(y) = \text{arc tang}(-y) = \pm k\pi - \alpha,$$

$$-\text{arc cotg}(y) = \text{arc cotg}(-y) = \pm k\pi - \alpha,$$

$$-\text{arc cosec}(y) = \text{arc cosec}(-y) = \alpha - (2k+1)\pi,$$

$$\text{oder} = \pm 2k\pi - \alpha.$$

Wenn $y = \cos x$, also $x = \text{arc cos}(y)$ ist, so ist auch:

$$-y = -\cos x = \cos(\pi \pm x);$$

also: $\text{arc cos}(-y) = \pi \pm \text{arc cos}(y) = (2k+1)\pi \pm \alpha$, und ebenso findet man:

$$\text{arc sec}(-y) = \pi \pm \text{arc cos}(y) = (2k+1)\pi \pm \alpha.$$

Relationen zwischen den trigonometrischen Linien desselben Bogens.

§. 31. Zwischen den 6 trigonometrischen Linien desselben Bogens finden 5 verschiedene Relationen statt, mit deren Ableitung wir uns jetzt beschäftigen wollen.

Es sei A (Fig. 3) der Anfangspunkt der Bogen und x ein positiver, oder negativer Bogen, dessen Endpunkt M im ersten Quadranten AB liegt. Zieht man den Halbmesser OM, fällt die Perpendikel MP, MQ resp. auf OA, OB und zieht endlich durch die Punkte A, B, M die Tangenten AT, BS, KH; so hat man:

$$OM = 1,$$
$$\sin x = MP, \tan x = AT, \sec x = OK,$$
$$\cos x = OP, \quad \cot x = BS, \operatorname{cosec} x = OH.$$

Nun gibt das rechtwinklige Dreieck OMP:

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2,$$

ebenso geben die rechtwinkligen Dreiecke MOK, MOH:

$$OK \,.\, OP = \overline{OM}^2,$$
$$OH \,.\, OQ = \overline{OM}^2,$$

und endlich die ähnlichen Dreiecke TOA, MOP und BOS, MOQ:

$$\frac{TA}{OA} = \frac{MP}{OP},$$
$$\frac{SB}{OB} = \frac{MQ}{OQ}.$$

Die letzten 5 Gleichheiten lassen sich auch folgendermaßen schreiben:

(1) $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$
(2) $$\sec x \,.\, \cos x = 1,$$
(3) $$\operatorname{cosec} x \,.\, \sin x = 1,$$
(4) $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$
(5) $$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

welches die gesuchten 5 Relationen sind. Es lassen sich daraus noch mehrere andere bemerkenswerthe Beziehungen ableiten. So geben z. B. die Gleichungen (4) und (5) durch Division:

(6) $$\cot x = \frac{1}{\tan x};$$

die Gleichungen (2) und (3) geben:

(7) $$\sec x = \frac{1}{\cos x},$$
(8) $$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x},$$

woraus man sieht: daß cot x, sec x und cosec x resp. die reciproken Werthe von tang x, cos x und sin x sind. —

Nach den Gleichungen (4) und (5) ist ferner:

$$1 + \text{tang}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x},$$

oder wegen (7) und (8):

$$(9) \qquad \sec^2 x = 1 + \text{tang}^2 x,$$

$$(10) \qquad \text{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x,$$

wie auch unmittelbar aus der Figur erhellet.

§. 32. Wir haben bei der Ableitung der Gleichungen (1), (2), (3), (4) und (5) vorausgesetzt: daß der Endpunkt **M** des Bogens x im ersten Quadranten liege; aber man sieht leicht ein, daß diese Gleichungen allgemein gelten. — Denn welche Lage der Punkt **M** auf dem Kreisumfange auch haben mag, so gibt es nach §. 22. doch immer zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ einen Bogen, welcher, abgesehen vom Zeichen, dieselben trigonometrischen Linien hat, als x. Wenn man also nur auf die absoluten Werthe der trigonometrischen Linien sieht, so finden die Gleichungen (1), (2), (3), (4) und (5) immer statt. — Die Gleichung (1), worin blos die Quadrate von sin x und cos x vorkommen, findet folglich immer statt — und es braucht mithin nur noch gezeigt zu werden: daß die beiden Theile jeder der Gleichungen (2), (3), (4) und (5) für jeden Werth von x dasselbe Zeichen haben. Nun haben wir aber gesehen:

1) daß cos x und sec x beide positiv sind, wenn der Endpunkt des Bogens x im ersten oder vierten Quadranten liegt, und daß sie in den beiden andern Fällen negativ sind;
2) daß sin x und cosec x beide positiv sind, wenn der Endpunkt des Bogens x im ersten oder zweiten Quadranten liegt, und daß sie in den beiden andern Fällen negativ sind;
3) daß tang x und cot x beide positiv sind, wenn der Endpunkt des Bogens x im ersten oder dritten Quadranten liegt, in welchem Falle sin x und cos x dasselbe Zeichen haben, während sie negativ sind, wenn der Endpunkt des

Bogens x im zweiten oder vierten Quadranten liegt, in welchem Falle sin x und cos x entgegengesetzte Zeichen haben. —

Hieraus und aus der Regel für die Multiplikation entgegengesetzter Größen folgt: daß die beiden Theile jeder der Gleichungen (2), (3), (4) und (5) immer gleiche Zeichen haben; folglich gelten diese Gleichungen für jeden Werth von x. —

§. 33. Vermittelst der Gleichungen (1), (2), (3), (4) und (5) kann man immer 5 der 6 trigonometrischen Linien als Funktionen der sechsten ausdrücken. So hat man z. B.:

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x},\ \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}},\ \cot x = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}},\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Hierbei ist jedoch wohl zu bemerken: daß, wenn man eine trigonometrische Linie eines Bogens x kennt, die übrigen trigonometrischen Linien desselben nicht alle völlig bestimmt sind. — Wenn z. B. sin x gegeben ist, so ist cosec x bestimmt; aber von den übrigen 4 trigonometrischen Linien kennt man blos die absoluten Werthe. — Dieses hat darin seinen Grund: daß unter den Bogen, deren Sinus gegeben ist, welche vorkommen, deren Cosinus, Tangente, Cotangente und Sekante positiv ist, und auch andere, für welche dieselben trigonometrischen Linien negativ sind. —

§. 34. Man kann leicht zeigen: daß zwischen den trigonometrischen Linien keine andern Relationen stattfinden können, als die 5 vorhin abgeleiteten. Denn wenn es eine solche Relation gäbe, und man setzte darin für cos x, tang x, cot x, sec x und cosec x ihre aus den Gleichungen (1) bis (5) abgeleiteten Werthe als Funktionen von sin x; so erhielte man eine nicht identische Gleichung, welcher sin x genügen müßte, was nicht möglich ist, weil sin x eine willkürliche Zahl ist. —

Wenn man jede der 6 trigonometrischen Linien als Funktionen der 5 übrigen ausdrückt, so erhält man folgende Tafel:

Gegeben:	Gesucht:					
	sin x	cos x	tang x	cot x	sec x	cosec x
sin x	$\sin x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{1}{\sin x}$
cos x	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\cos x$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$
tang x	$\frac{\operatorname{tang} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}}$	$\operatorname{tang} x$	$\frac{1}{\operatorname{tang} x}$	$\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}$	$\frac{\pm\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}}{\operatorname{tang} x}$
cot x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{\cot x}{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}$	$\frac{1}{\cot x}$	$\cot x$	$\frac{\pm\sqrt{1+\cot^2 x}}{\cot x}$	$\pm\sqrt{1+\cot^2 x}$
sec x	$\frac{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}{\sec x}$	$\frac{1}{\sec x}$	$\pm\sqrt{\sec^2 x-1}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$	$\sec x$	$\frac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$
cosec x	$\frac{1}{\operatorname{cosec} x}$	$\frac{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}}{\operatorname{cosec} x}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}}$	$\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}$	$\frac{\operatorname{cosec} x}{\pm\sqrt{\operatorname{cosec}^2 x-1}}$	$\operatorname{cosec} x$

§. 34. Setzt man also successive $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tang} x$, $y = \operatorname{cotg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$, so daß $x = \operatorname{arc} \sin (y)$, $x = \operatorname{arc} \cos (y)$, $x = \operatorname{arc} \operatorname{tang} (y)$, $x = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} (y)$, $x = \operatorname{arc} \sec (y)$, $x = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} (y)$ ist; so hat man für die inversen oder cyclometrischen Funktionen:

$$\operatorname{arc} \sin (y) = \operatorname{arc} \cos (\pm\sqrt{1-y^2}) = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}\right)$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{cotg} \left(\frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}\right) = \operatorname{arc} \sec \left(\frac{1}{\pm\sqrt{1-y^2}}\right)$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{cosec} \left(\frac{1}{y}\right),$$

$$\operatorname{arc} \cos (y) = \operatorname{arc} \sin (\pm\sqrt{1-y^2}) = \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\frac{\pm\sqrt{1-y^2}}{y}\right)$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{cotg} \left(\frac{y}{\pm\sqrt{1-y^2}}\right) = \operatorname{arc} \sec \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{cosec} \left(\frac{1}{\pm\sqrt{1-y^2}}\right),$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{tang} (y) = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{y}{\pm\sqrt{1+y^2}}\right) = \operatorname{arc} \cos \left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+y^2}}\right)$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{cotg} \left(\frac{1}{y}\right) = \operatorname{arc} \sec (\pm\sqrt{1+y^2})$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{cosec} \left(\frac{\pm\sqrt{1+y^2}}{y}\right),$$

$$\operatorname{arc} \operatorname{cotg} (y) = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{1}{\pm\sqrt{1+y^2}}\right) = \operatorname{arc} \cos \left(\frac{y}{\pm\sqrt{1+y^2}}\right)$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\frac{1}{y}\right) = \operatorname{arc} \sec \left(\frac{\pm\sqrt{1+y^2}}{y}\right)$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{cosec} (\pm\sqrt{1+y^2}),$$

$$\operatorname{arc} \sec (y) = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\pm\sqrt{y^2-1}}{y}\right) = \operatorname{arc} \cos \left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tang} (\pm\sqrt{y^2-1}) = \operatorname{arc} \operatorname{cotg} \left(\frac{1}{\pm\sqrt{y^2-1}}\right)$$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{cosec} \left(\frac{y}{\pm\sqrt{y^2-1}}\right),$$

$$\text{arc cosec}\,(y) = \text{arc sin}\left(\frac{1}{y}\right) = \text{arc cos}\left(\frac{\pm\sqrt{y^2-1}}{y}\right)$$

$$= \text{arc tang}\left(\frac{1}{\pm\sqrt{y^2-1}}\right) = \text{arc cotg}\,(\pm\sqrt{y^2-1})$$

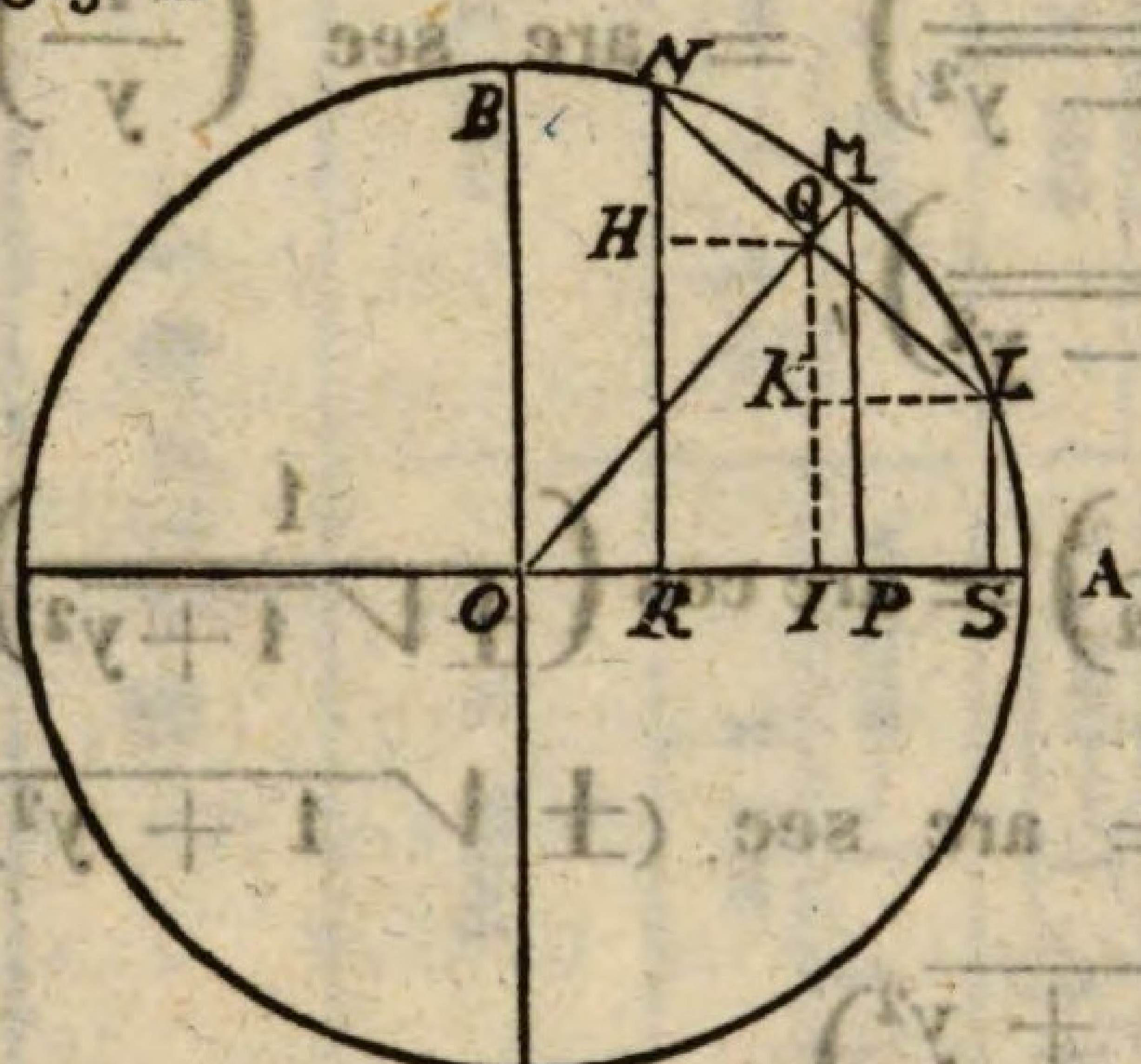
$$= \text{arc sec}\left(\frac{y}{\pm\sqrt{y^2-1}}\right).$$

Trigonometrische Formeln mit Addition und Subtraktion der Bogen.

§. 35. Sinus und Cosinus. — Wir wollen nun zeigen, wie man den Sinus und Cosinus der Summe, oder der Differenz zweier Bogen finden kann, wenn die Sinus und Cosinus dieser Bogen bekannt sind.

Es seien a, b zwei positive Bogen, wovon der erste nicht kleiner als der zweite ist, und deren Summe $\frac{\pi}{2}$ nicht übersteigt. A (Fig. 4) sei der Anfangspunkt der Bogen, AM = a und MN = ML = b, so ist:

Fig. 4.



$$a + b = AN,\ a - b = AL.$$

Zieht man die Sehne NL, so ist dieselbe auf dem Halbmesser OM senkrecht, und wenn man NR, QI, MP, LS senkrecht auf OA, so wie QH, LK parallel zu OA zieht; so hat man:

$$\sin a = MP,\ \cos a = OP,$$
$$\sin b = NQ,\ \cos b = OQ.$$

Bemerkt man ferner: daß die Dreiecke NQH, LQK einander gleich sind, weil NQ = QL und zwei Winkel einzeln einander gleich sind; so hat man auch:

$$\sin(a+b) = NR = QI + NH,$$
$$\cos(a+b) = OR = OI - QH,$$
$$\sin(a-b) = LS = QI - NH,$$
$$\cos(a-b) = OS = OI + QH.$$

Weiter geben die ähnlichen Dreiecke MPO, QIO:

$$\frac{QI}{MP} = \frac{OI}{OP} = \frac{OQ}{OM},$$

woraus folgt:

$$QI = \frac{MP . OQ}{OM} = \sin a \cos b,$$

$$OI = \frac{OP . OQ}{OM} = \cos a \cos b.$$

Die Dreiecke MPO, NQH sind ebenfalls einander ähnlich, weil ihre Seiten resp. aufeinander senkrecht stehen, und man hat folglich:

$$\frac{NH}{OP} = \frac{QH}{MP} = \frac{NQ}{OM'}$$

woraus folgt:

$$NH = \frac{OP . NQ}{OM} = \cos a \sin b,$$

$$QH = \frac{MP . NQ}{OM} = \sin a \sin b.$$

Nachdem so die Werthe von QI, OI, NH und QH gefunden sind, hat man:

(1) $\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$

(2) $\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$

(3) $\sin (a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$

(4) $\cos (a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

Bei der Ableitung der Gleichungen (1) bis (4) ist vorausgesetzt: daß a, b zwei positive Bogen sind, deren Summe $\frac{\pi}{2}$ nicht überschreitet, und die Gleichungen (3), (4) erfordern auch: daß a nicht $<$ b ist, welche Beschränkung bei (1) und (2) wegen der Symmetrie wegfällt. Wir wollen jetzt zeigen: daß diese 4 Gleichungen allgemeine Gültigkeit haben.

1) Die Gleichungen (1), (2) gelten für alle Werthe von a, b, welche zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ liegen.

Da dieses bereits für $a + b < \frac{\pi}{2}$ bewiesen ist, so wollen wir jetzt $a + b > \frac{\pi}{2}$ setzen, und es seien a′, b′ die Complemente von a, b; so ist $a' + b' < \frac{\pi}{2}$; folglich:

$$\sin (a' + b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b',$$
$$\cos (a' + b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b'.$$

Setzt man in diesen Gleichungen für a′ b′, ihre Werthe $\frac{\pi}{2} - a,$

$\frac{\pi}{2}$ — b und erinnert sich: daß die Sinus zweier Supplementarbogen gleich und ihre Cosinus gleich und entgegengesetzt sind; so erhält man:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

d. h. die Gleichungen (1) und (2).

2) Wenn die Gleichungen (1), (2) für zwei Bogen a, b gelten, so gelten sie auch noch, wenn man zu einem dieser Bogen, oder zu beiden $\frac{\pi}{2}$, oder ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ addirt. —

Nach der Voraussetzung ist:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

und es sei $a' = a + \frac{\pi}{2}$, also $a = a' - \frac{\pi}{2}$; so hat man, wenn dieser Werth für a gesetzt wird:

$$\sin(a' + b - \frac{\pi}{2}) = \sin(a' - \frac{\pi}{2}) \cos b + \cos(a' - \frac{\pi}{2}) \sin b,$$

$$\cos(a' + b - \frac{\pi}{2}) = \cos(a' - \frac{\pi}{2}) \cos b - \sin(a' - \frac{\pi}{2}) \sin b.$$

Nun ist aber für jedes x:

$$\sin(x - \frac{\pi}{2}) = - \sin(\frac{\pi}{2} - x) = - \cos x,$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x,$$

und mithin werden die beiden vorhergehenden Gleichungen:

$$\cos(a' + b) = \cos a' \cos b - \sin a' \sin b,$$
$$\sin(a' + b) = \sin a' \cos b + \cos a' \sin b,$$

d. h. genau die Gleichungen (1), (2), wenn darin $a' = a + \frac{\pi}{2}$ statt a gesetzt wird. —

Wenn also die Gleichungen (1), (2) für zwei Bogen a, b gelten, so behalten sie auch ihre Gültigkeit, wenn man zu einem dieser Bogen $\frac{\pi}{2}$ oder ein beliebiges Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ addirt, und

dasselbe ist der Fall, wenn auch zu dem andern Bogen ein beliebiges Vielfache von $\frac{\pi}{2}$ addirt wird. —

Hieraus folgt: daß die Gleichungen (1), (2) für alle positiven Werthe von a, b gelten. Denn ist:

$$a = m \cdot \frac{\pi}{2} + a', \quad b = n \cdot \frac{\pi}{2} + b', \qquad \text{(i)}$$

wo a′ und b′ kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, so gelten die Gleichungen (1), (2), wenn man darin a′, b′ resp. für a, b setzt, und mithin gelten sie nach dem Gesagten auch für die Werthe (i). —

3) Die Gleichungen (1), (2) gelten für beliebige Werthe von a, b, wovon der eine positiv und der andere negativ ist.

Es sei a positiv und b negativ, und k bezeichne eine solche ganze positive Zahl, daß dem absoluten Werthe nach $2k\pi > b$ ist; so hat man, da $2k\pi + b$ positiv ist:

$$\sin(a + 2k\pi + b) = \sin a \cos(2k\pi + b) + \cos a \sin(2k\pi + b),$$
$$\cos(a + 2k\pi + b) = \cos a \cos(2k\pi + b) - \sin a \sin(2k\pi + b).$$

Aber es ist für jedes x (§§. 9 und 20.):

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x, \quad \cos(2k\pi + x) = \cos x;$$

folglich:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

d. h. die Gleichungen (1) und (2).

4) Die Gleichungen (1) und (2) gelten für beliebige negative Werthe von a und b.

Es sei:

$$a = -a', \quad b = -b',$$

wo a′, b′ positiv sind; so hat man:

$$\sin(a' + b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b',$$
$$\cos(a' + b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b'.$$

Setzt man hierin — a, — b für a′, b′ und erinnert sich, daß:

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$$

ist; so ergibt sich:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Die Allgemeingültigkeit der Gleichungen (1), (2) ist also vollständig erwiesen.

Da sich die Gleichungen (3), (4) aus (1), (2) ergeben, wenn — b für b gesetzt wird, so gelten sie ebenfalls für alle Werthe von a und b.

§. 37. Nicht blos die Gleichungen (3), (4) lassen sich aus (1), (2) ableiten, sondern es läßt sich auch jede der Gleichungen (1), (2) aus der andern herleiten. Denn setzt man z. B. in der Gleichung (1):

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

welche für zwei beliebige Bogen gilt, $\frac{\pi}{2} - a$ für a und — b für b; so kommt:

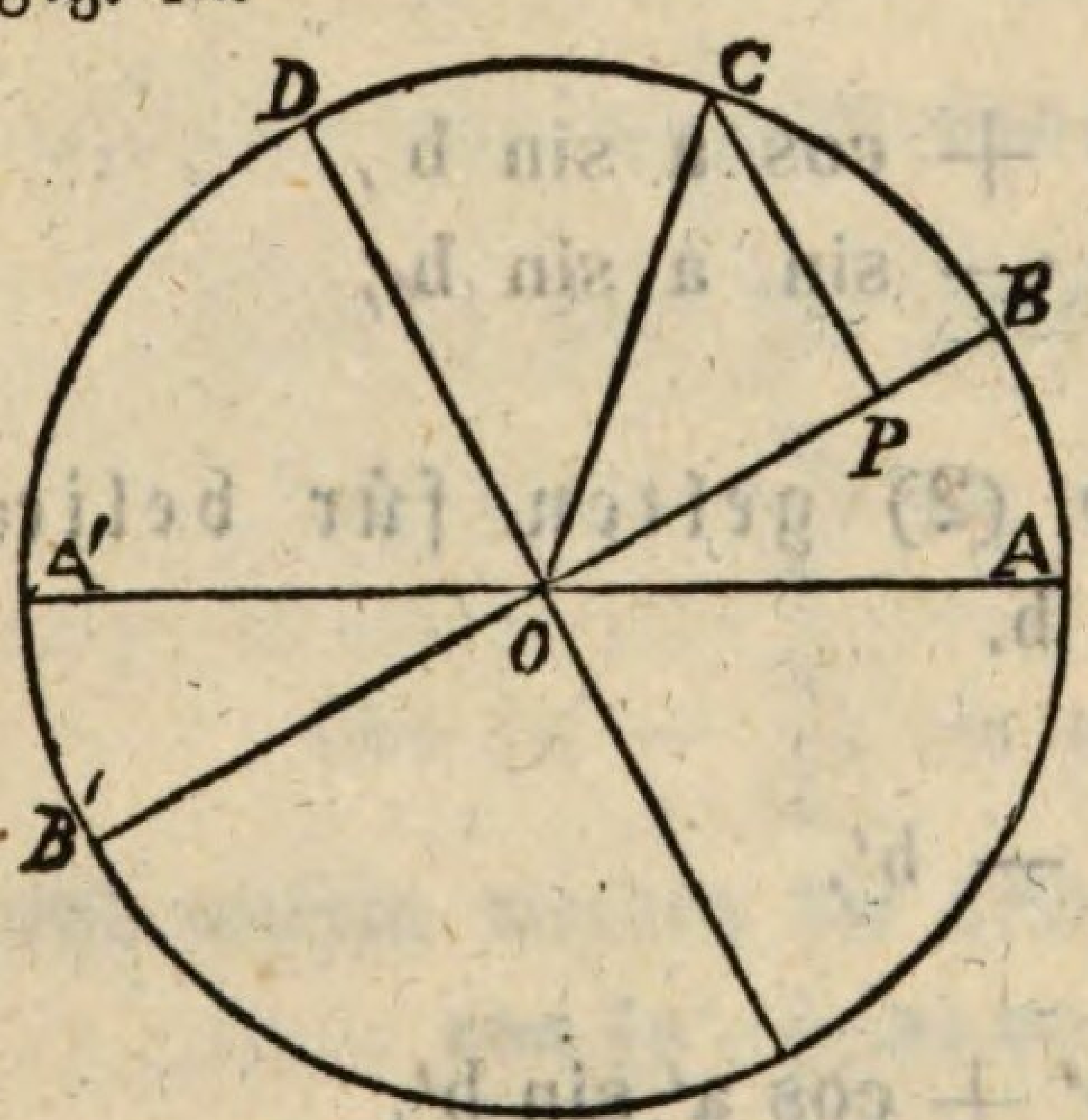
$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$$

also genau die Gleichung (2). Umgekehrt läßt sich die Gleichung (1) aus (2) ableiten, so daß sich die 4 Gleichungen (1), (2), (3) und (4) im Grunde auf eine einzige reduciren; allein es ist oft vortheilhaft, sie alle zugleich zu betrachten.

Wegen der Wichtigkeit der Fundamentalformeln (1), (2), (3) und (4) mag noch die folgende, auf der Theorie der Projektionen beruhende, sehr einfache Herleitung derselben hier Platz finden.

Es sei AB = a, BC = b (Fig. 4ᵃ), also AC = a + b, und

Fig. 4a.



außerdem sei $BD = \frac{\pi}{2}$; so ist das Perpendikel CP = sin b und OP = cos b. Nun ist aber nach der Theorie der Projektionen die Projektion von OC auf OA der von PC und OP auf OA gleich. Die Projektion von OC auf OA ist = cos (a + b), die von OP auf OA = cos b cos a und die von CP auf OA = sin b cos $(\frac{\pi}{2} + a) = - \sin b \sin a$. Man hat also die Gleichung:

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

woraus sich, wie eben bemerkt, die drei andern Gleichungen leicht herleiten lassen. — Da die Theorie der Projektionen für beliebige positive, oder negative Werthe von a und b gültig ist, so folgt, daß auch die letzte Gleichung, so wie jede der drei andern für beliebige Werthe von a und b Gültigkeit hat.

§. 38. Man kann auch leicht den Sinus und Cosinus der Summe einer beliebigen Anzahl von Bogen finden, wenn die Sinus und Cosinus der einzelnen Bogen bekannt sind. Für drei beliebige Bogen a, b, c hat man z. B.:

$$\sin[(a+b)+c] = \sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c,$$
$$\cos[(a+b)+c] = \cos(a+b)\cos c - \sin(a+b)\sin c.$$

Setzt man hierin für $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$ ihre Werthe, so erhält man:

$$\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c,$$
$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c - \cos b \sin a \sin c + \cos c \sin a \sin b.$$

u. s. f.

§. 39. Tangenten und Cotangenten. — Wir wollen nun die Tangente und Cotangente der Summe und Differenz zweier Bogen suchen, wenn die Tangenten und Cotangenten der einzelnen Bogen gegeben sind.

Es seien a, b zwei beliebige positive, oder negative Bogen, so hat man:

$$\tang(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos a \cos b - \sin a \sin b},$$

und wenn man Zähler und Nenner des letzten Ausdruckes mit $\cos a \cos b$ dividirt; so erhält man:

$$(5) \qquad \tang(a+b) = \frac{\tang a + \tang b}{1 - \tang a \tang b}.$$

Setzt man hierin $-b$ statt b, so ergibt sich:

$$\tang(a-b) = \frac{\tang a - \tang b}{1 + \tang a \tang b}.$$

Ferner ist:

$$\cot(a+b) = \frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)} = \frac{\cos a \cos b - \sin a \sin b}{\sin a \cos b + \cos a \sin b},$$

und wenn man im Zähler und Nenner mit $\sin a \sin b$ dividirt:

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}.$$

Es verdient bemerkt zu werden: daß sich $\tang(a+b)$ und $\cot(a+b)$ immer rational durch tang a, tang b und cot a, cot b ausdrücken lassen, während sich $\sin(a+b)$ und $\cos(a+b)$ offenbar nicht rational durch sin a, sin b und cos a, cos b ausdrücken lassen.

3*

§. 40. Man kann auch leicht die Tangente der Summe einer beliebigen Anzahl von Bogen als Funktion der Tangenten der einzelnen Bogen ausdrücken. — Es seien z. B. a, b, c drei beliebige Bogen, so hat man:

$$\mathrm{tang}\,[(a+b)+c] = \frac{\mathrm{tang}\,(a+b)+\mathrm{tang}\,c}{1-\mathrm{tang}\,(a+b)\,\mathrm{tang}\,c},$$

und wenn man für tang (a + b) seinen obigen Werth setzt:

$$\mathrm{tang}\,(a+b+c) = \frac{\mathrm{tang}\,a+\mathrm{tang}\,b+\mathrm{tang}\,c-\mathrm{tang}\,a\,\mathrm{tang}\,b\,\mathrm{tang}\,c}{1-\mathrm{tang}\,a\,\mathrm{tang}\,b-\mathrm{tang}\,a\,\mathrm{tang}\,c-\mathrm{tang}\,b\,\mathrm{tang}\,c}.$$

Allgemein, wenn man n Bogen a, b, c, ... hat, und man bezeichnet mit S_1 die Summe ihrer Tangenten und mit S_2, S_3, S_4, S_5, ... resp. die Summe der Produkte aus je 2, je 3, je 4, ... dieser Tangenten; so ist:

$$\mathrm{tang}\,(a+b+c+\ldots) = \frac{S_1-S_3+S_5-\ldots}{1-S_2+S_4-\ldots}$$

§. 41. Sekanten und Cosekanten. — Die Werthe von sec (a + b) und cosec (a + b) sind offenbar die reciproken Werthe von cos (a + b) und sin (a + b); sie werden übrigens wenig angewandt. —

Weitere wichtige Folgerungen aus den abgeleiteten Formeln.

§. 42. Aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a\cos b+\cos a\sin b,\\
\cos(a+b) &= \cos a\cos b-\sin a\sin b,\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b-\cos a\sin b,\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b+\sin a\sin b
\end{aligned}$$

ergibt sich durch Addition und Subtraktion:

$$(1)\quad\begin{cases}
\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b,\\
\sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\cos a\sin b,\\
\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b,\\
\cos(a-b)-\cos(a+b) = 2\sin a\sin b.
\end{cases}$$

Setzt man:

$$a+b=p,\quad a-b=q,$$

so ist:

$$a=\tfrac{1}{2}(p+q),\quad b=\tfrac{1}{2}(p-q),$$

und wenn man diese Werthe in die vorhergehenden Gleichungen setzt; so gehen sie in folgende über:

$$(2)\quad \begin{aligned} \sin p + \sin q &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q), \\ \sin p - \sin q &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(p-q) \cos \tfrac{1}{2}(p+q), \\ \cos p + \cos q &= 2 \cos \tfrac{1}{2}(p+q) \cos \tfrac{1}{2}(p-q), \\ \cos q - \cos p &= 2 \sin \tfrac{1}{2}(p+q) \sin \tfrac{1}{2}(p-q). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2) werden häufig angewandt, und man kann mit Hülfe derselben die Summe, oder Differenz zweier Sinus, oder zweier Cosinus durch ein Produkt von Sinussen und Cosinussen ausdrücken.

Ebenso kann man die Summe, oder die Differenz eines Sinus und eines Cosinus durch ein Produkt von Sinussen und Cosinussen ausdrücken; denn es ist:

$$\cos p \pm \sin q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - p\right) \pm \sin q,$$

und wenn man die Gleichungen (2) anwendet:

$$(3)\quad \begin{aligned} \cos p + \sin q &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right), \\ \cos p - \sin q &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right). \end{aligned}$$

Wenn man die Gleichungen (2) paarweise in einander dividirt, so erhält man die folgenden bemerkenswerthen Formeln:

$$(4)\quad \begin{aligned} \frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{\sin \frac{1}{2}(p-q) \cos \frac{1}{2}(p+q)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(p-q)}, \\ \frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(p+q)}{\cos \frac{1}{2}(p+q)} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p+q), \\ \frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(p-q)}{\sin \frac{1}{2}(p-q)} = \cot \tfrac{1}{2}(p-q), \\ \frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(p-q)}{\cos \frac{1}{2}(p-q)} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(p-q), \\ \frac{\sin p - \sin q}{\cos q - \cos p} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q)}{\sin \frac{1}{2}(p+q)} = \cot \tfrac{1}{2}(p+q), \\ \frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)}{\sin \frac{1}{2}(p+q) \sin \frac{1}{2}(p-q)} \\ &= \cot \tfrac{1}{2}(p+q) \cot \tfrac{1}{2}(p-q). \end{aligned}$$

§. 42. Man kann auch eine Summe, oder Differenz zweier Tangenten in ein Produkt trigonometrischer Linien umformen; denn es ist:

$$\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{\cos a \cos b},$$

oder:

$$\tang a \pm \tang b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \sin b},$$

$$\cot a \pm \tang b = \frac{\cos(a \pm b)}{\sin a \cos b}.$$

Wenn man die beiden Gleichungen:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

in einander multiplicirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}\sin(a + b)\sin(a - b) &= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b\\ &= (1 - \sin^2 b)\sin^2 a - (1 - \sin^2 a)\sin^2 b\\ &= (1 - \cos^2 a)\cos^2 b - (1 - \cos^2 b)\cos^2 a,\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}\sin(a + b)\sin(a - b) &= \sin^2 a - \sin^2 b\\ &= \cos^2 b - \cos^2 a.\end{aligned}$$

Formeln mit Multiplikation der Bogen.

§. 43. Sinus und Cosinus. — Wenn man in den Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases}\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b\\ \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{cases}$$

$b = a$ setzt, so erhält man:

$$(2)\quad \begin{aligned}\sin 2a &= 2 \sin a \cos a,\\ \cos 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a.\end{aligned}$$

Will man sin 2 a blos als Funktion von sin a oder cos a und cos 2 a als eine Funktion von sin a oder cos a haben, so muß man resp. $\sqrt{1 - \sin^2 a}$ für cos a und $\sqrt{1 - \cos^2 a}$ für sin a setzen, wodurch man erhält:

$$(3)\quad \begin{cases}\sin 2a = \pm 2 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a},\\ \quad\;\; = \pm 2 \cos a \sqrt{1 - \cos^2 a},\\ \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a,\\ \quad\;\; = 2 \cos^2 a - 1.\end{cases}$$

Es läßt sich also cos 2 a immer rational durch sin a, oder cos a ausdrücken, während sich sin 2 a nicht rational durch sin a, oder cos a ausdrücken läßt; mithin ist cos 2 a immer völlig

bestimmt, sobald sin a oder cos a gegeben ist, während sin 2 a in diesem Falle nur dem absoluten Werthe nach bestimmt ist, wovon wir nun den Grund näher angeben wollen.

Wir wollen zunächst annehmen: daß der Werth von sin a gegeben sei, und setzen:

$$\sin a = A,$$

so ist der Bogen a unbestimmt, und seine unendlich vielen Werthe werden nach §. 24. durch die Formeln:

$$a = 2 k \pi + \alpha, \; a = (2 k + 1) \pi - \alpha$$

gegeben, wo α einen bestimmten Bogen bezeichnet, dessen Sinus $= A$ ist. Die Werthe von sin 2 a und cos 2 a werden also durch die Formeln gegeben:

$$\sin 2 a = \sin (4 k \pi + 2 \alpha) = \sin 2 \alpha,$$
$$\sin 2 a = \sin (4 k \pi + 2 \pi - 2 \alpha) = - \sin 2 \alpha,$$
$$\cos 2 a = \cos (4 k \pi + 2 \alpha) = \cos 2 \alpha,$$
$$\cos 2 a = \cos (4 k \pi + 2 \pi - 2 \alpha) = \cos 2 \alpha.$$

Hieraus sieht man: daß sin 2 a den doppelten Werth $\pm \sin 2 \alpha$ haben kann, während cos 2 a nur den einen Werth $\cos 2 \alpha$ hat.

Dasselbe findet statt, wenn cos a gegeben ist; denn es sei:

$$\cos a = A,$$

und α ein bestimmter Bogen, dessen Cosinus $= A$ ist; so werden die Werthe von a durch die Formel:

$$a = 2 k \pi \pm \alpha$$

gegeben, und mithin die Werthe von sin 2 a und cos 2 a durch:

$$\sin 2 a = \sin (4 k \pi \pm 2 \alpha) = \pm \sin 2 \alpha,$$
$$\cos 2 a = \cos (4 k \pi \pm 2 \alpha) = \cos 2 \alpha.$$

Also hat sin 2 a wieder zwei gleiche Werthe mit entgegengesetzten Zeichen, während cos 2 a nur einen Werth hat.

§. 44. Wenn man in den Formeln (1) setzt b = 2 a, und die Gleichungen (2) beachtet, so kommt:

$$(4) \quad \begin{cases} \sin 3 a = 3 \sin a \cos^2 a - \sin^3 a, \\ \cos 3 a = \cos^3 a - 3 \sin^2 a \cos a, \end{cases}$$

welche Formeln sin 3 a und cos 3 a als Funktionen von sin a und cos a geben. Setzt man in der ersten $1 - \sin^2 a$ statt $\cos^2 a$ und in der zweiten $1 - \cos^2 a$ statt $\sin^2 a$, so erhält man:

$$(5) \quad \begin{cases} \sin 3 a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a, \\ \cos 3 a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a. \end{cases}$$

Es läßt sich also sin 3 a rational durch sin a und cos 3 a rational durch cos a ausdrücken, während es nicht möglich ist: sin 3 a rational durch cos a, oder cos 3 a rational durch sin a auszudrücken. — Wenn also sin a gegeben ist, so ist sin 3 a völlig bestimmt, während cos 3 a nur dem absoluten Werthe nach bestimmt ist. Ist dagegen cos a gegeben, so ist cos 3 a bestimmt, aber sin 3 a nicht. — Durch ähnliche Betrachtungen, wie weiter oben, läßt sich a priori zeigen: daß dem so sein muß. —

Es sei zunächst gegeben sin a = A, so sind die Werthe von a:

$$a = 2k\pi + \alpha, \quad a = (2k + 1)\pi - \alpha,$$

wo α wieder einen ganz bestimmten Bogen bezeichnet, dessen Sinus = A ist. Die Werthe von sin 3 a und cos 3 a sind also:

$$\sin 3a = \sin(6k\pi + 3\alpha) = \sin 3\alpha,$$
$$\sin 3a = \sin(6k\pi + 3\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha,$$
$$\cos 3a = \cos(6k\pi + 3\alpha) = \cos 3a,$$
$$\cos 3a = \cos(6k\pi + 3\pi - 3\alpha) = -\cos 3\alpha.$$

Hieraus sieht man: daß sin 3 a nur den einen Werth sin 3 α; aber cos 3 a den doppelten Werth $\pm$ cos 3 α hat.

Wenn dagegen cos a = A gegeben ist, so sind die Werthe von a:

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

wo α einen bestimmten Bogen bedeutet, dessen Cosinus = A ist. Die Werthe von sin 3 a und cos 3 a sind:

$$\sin 3a = \sin(6k\pi \pm 3\alpha) = \pm \sin 3\alpha,$$
$$\cos 3a = \cos(6k\pi \pm 3\alpha) = \cos 3\alpha.$$

Es hat also sin 3 a den doppelten Werth $\pm$ sin 3 α und cos 3 a den einen Werth cos 3 α.

Man sieht leicht ein, wie man durch Fortsetzung dieses Verfahrens successive sin 4 a, sin 5 a, . . . cos 4 a, cos 5 a, ... als Funktionen von sin a und cos a finden kann. Allein wir wollen hier diese Rechnungen nicht weiter fortsetzen, da wir später eine allgemeine Methode zur direkten Bestimmung der Werthe von sin m a und cos m a mittheilen werden, was für eine ganze Zahl m auch sein mag. —

§. 45. Tangenten und Cotangenten. — Wenn man in der Gleichung:

$$(6) \qquad \operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}$$

b = a setzt, so kommt:

$$(7) \qquad \operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a},$$

welche Formel tang 2 a als rationale Funktion von tang a gibt.

Wenn man in der Gleichung (6), b = 2 a setzt, so kommt:

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} 2a}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} 2a},$$

und wenn man für tang 2 a seinen Werth setzt:

$$(8) \qquad \operatorname{tang} 3a = \frac{3 \operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 a}.$$

Setzt man dieses Verfahren weiter fort, so kann man successive tang 4 a, tang 5 a, ... als rationale Funktionen von tang a finden; allein wir werden später den allgemeinen Ausdruck von tang ma als Funktion von tang a entwickeln.

Man kann a priori zeigen: daß, wenn tang a = A gegeben ist, der Werth von tang ma vollständig bestimmt ist.

Denn wenn α einen bestimmten Bogen bedeutet, dessen Tangente = A ist; so werden die Werthe von a durch die Formel:

$$a = k\pi + \alpha$$

gegeben (§. 26.), und die von tang ma durch:

$$\operatorname{tang} ma = \operatorname{tang}(mk\pi + m\alpha) = \operatorname{tang} m\alpha;$$

mithin hat tang ma nur den einen Werth tang $m\alpha$. —

§. 46. Wenn man in der Gleichheit:

$$(10) \qquad \cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$$

b = a setzt, so kommt:

$$(11) \qquad \cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a},$$

welche Formel sich auch aus der für tang 2 a ergibt. Allgemein: wenn man tang ma als Funktion von tang a hat, so braucht man nur $\frac{1}{\cot ma}$ für tang ma und $\frac{1}{\cot a}$ für tang a zu setzen, um den Ausdruck von cot ma als Funktion von cot a zu erhalten.

Auf ähnliche Weise ergeben sich die Werthe von sec ma und cosec ma aus denen von cos ma und sin ma.

Formeln mit Division der Bogen.

§. 47. Sinus und Cosinus. — Wenn man in den Gleichheiten:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$\frac{1}{2}a$ statt a setzt, so erhält man:

$$(1)\quad \begin{cases} \sin a = 2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a \\ \cos a = \cos^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a. \end{cases}$$

Vermittelst dieser Formeln kann man $\sin \frac{1}{2}a$ und $\cos \frac{1}{2}a$ berechnen, wenn man $\sin a$ oder $\cos a$ kennt, und wir wollen jetzt diese beiden Fälle näher betrachten.

§. 48. Wenn $\cos a$ gegeben ist, $\sin \frac{1}{2}a$ und $\cos \frac{1}{2}a$ zu finden. — Aus den beiden Gleichungen:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a - \sin^2 \tfrac{1}{2}a = \cos a,$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2}a + \sin^2 \tfrac{1}{2}a = 1$$

folgt:

$$(1')\quad \cos^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{1 + \cos a}{2},\ \sin^2 \tfrac{1}{2}a = \frac{1 - \cos a}{2};$$

also ist:

$$(2)\quad \cos \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},\ \sin \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}.$$

Die absoluten Werthe von $\cos \frac{1}{2}a$, $\sin \frac{1}{2}a$ sind also bestimmt; aber ihre Zeichen nicht, was sich wieder wie früher erklären läßt. Denn es sei A der gegebene Werth von $\cos a$ und α ein bestimmter Bogen, dessen Cosinus $= A$ ist; so werden die Werthe von a, für welche $\cos a = A$ ist, durch die Formel:

$$a = 2k\pi \pm \alpha$$

gegeben, und mithin die Werthe von $\cos \frac{1}{2}a$, $\sin \frac{1}{2}a$ durch:

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \cos (k\pi \pm \tfrac{1}{2}\alpha),$$
$$\sin \tfrac{1}{2}a = \sin (k\pi \pm \tfrac{1}{2}\alpha).$$

Nimmt man nun für k eine gerade Zahl, so ist nach §§. 9, 20.:

$$\cos \tfrac{1}{2}a = \cos \tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}a = \pm \sin \tfrac{1}{2}\alpha,$$

und wenn man für k eine ungerade Zahl nimmt:

$$\cos \tfrac{1}{2}a = -\cos \tfrac{1}{2}\alpha,$$
$$\sin \tfrac{1}{2}a = \pm \sin \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Hieraus sieht man: daß $\cos \frac{1}{2} a$ den doppelten Werth $\pm \cos \frac{1}{2} \alpha$ und $\sin \frac{1}{2} a$ den doppelten Werth $\pm \sin \frac{1}{2} \alpha$ hat.

§. 49. Wenn der Bogen a gegeben ist, so kann man $\sin \frac{1}{2} a$ und $\cos \frac{1}{2} a$ mittelst der Formeln (2) erhalten, weil alsdann die Zeichen von $\sin \frac{1}{2} a$ und $\cos \frac{1}{2} a$ zum Voraus bekannt sind. — Soll z. B. $\sin \frac{\pi}{12}$ und $\cos \frac{\pi}{12}$ gefunden werden, wenn $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gegeben ist; so geben die Formeln (2):

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

§. 50. Wenn $\sin a$ gegeben ist, $\cos \frac{1}{2} a$ und $\sin \frac{1}{2} a$ zu finden. — Aus den Gleichungen:

$$2 \sin \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} a = \sin a,$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} a = 1$$

ergibt sich durch Addition und Subtraktion:

$$(\cos \tfrac{1}{2} a + \sin \tfrac{1}{2} a)^2 = 1 + \sin a,$$
$$(\cos \tfrac{1}{2} a - \sin \tfrac{1}{2} a)^2 = 1 - \sin a;$$

folglich:

$$\cos \tfrac{1}{2} a + \sin \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{1 + \sin a},$$
$$\cos \tfrac{1}{2} a - \sin \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{1 - \sin a},$$

und hieraus durch Addition und Subtraktion:

$$(3) \quad \begin{cases} \cos \tfrac{1}{2} a = \pm \tfrac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}), \\ \sin \tfrac{1}{2} a = \pm \tfrac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}). \end{cases}$$

Man erhält also für $\cos \frac{1}{2} a$ und für $\sin \frac{1}{2} a$ vier Werthe, und merkwürdigerweise sind die Werthe von $\cos \frac{1}{2} a$ genau dieselben, als die von $\sin \frac{1}{2} a$, was wir noch erklären müssen.

Es sei A der gegebene Werth von $\sin a$ und α ein bestimmter Bogen, dessen Sinus $= A$ ist, so werden die Werthe von a durch die Formeln:

$$a = 2 k \pi + \alpha, \quad a = (2 k + 1) \pi - \alpha$$

gegeben, und die Werthe von $\cos \frac{1}{2} a$, $\sin \frac{1}{2} a$ sind folglich:

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \cos (k \pi + \tfrac{1}{2} \alpha), \quad \cos \tfrac{1}{2} a = \cos (k \pi + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} \alpha),$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sin (k \pi + \tfrac{1}{2} \alpha), \quad \sin \tfrac{1}{2} a = \sin (k \pi + \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} \alpha).$$

Nimmt man nun für k eine gerade Zahl, so ergibt sich hieraus:

$\cos \frac{1}{2} a = \cos \frac{1}{2} \alpha$, $\cos \frac{1}{2} a = \cos (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \alpha) = \sin \frac{1}{2} \alpha$,

$\sin \frac{1}{2} a = \sin \frac{1}{2} \alpha$, $\sin \frac{1}{2} a = \sin (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \alpha) = \cos \frac{1}{2} \alpha$,

und wenn man für k eine ungerade Zahl setzt:

$\cos \frac{1}{2} a = - \cos \frac{1}{2} \alpha$, $\cos \frac{1}{2} a = - \cos (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \alpha) = - \sin \frac{1}{2} \alpha$,

$\sin \frac{1}{2} a = - \sin \frac{1}{2} \alpha$, $\sin \frac{1}{2} a = - \sin (\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \alpha) = - \cos \frac{1}{2} \alpha$,

woraus hervorgeht: daß sowohl $\cos \frac{1}{2} a$, als $\sin \frac{1}{2} a$ die vier Werthe:

$$\pm \cos \frac{1}{2} \alpha, \pm \sin \frac{1}{2} \alpha$$

hat. —

Wenn der Bogen a gegeben ist, so erhält man die Werthe von $\cos \frac{1}{2} a$ und $\sin \frac{1}{2} a$ mittelst der Formeln (3) leicht. Denn da a bekannt ist, so kennt man die Zeichen von $\cos \frac{1}{2} a$ und $\sin \frac{1}{2} a$, und da von den 4 Werthen, welche die Formeln (3) geben; zwei positiv und zwei negativ sind; so muß man je nach den Umständen die beiden negativen, oder die beiden positiven wegwerfen, so daß man blos noch zwischen den beiden andern zu wählen hat. — Wenn z. B. sin a, so wie $\cos \frac{1}{2} a$ und $\sin \frac{1}{2} a$ positiv ist, so hat man:

$$\cos \frac{1}{2} a = + \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin a} \pm \sqrt{1 - \sin a}),$$
$$\sin \frac{1}{2} a = + \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \sin a} \mp \sqrt{1 - \sin a}).$$

Reducirt man nun den Bogen $\frac{1}{2} a$ auf den ersten Quadranten (§. 22.), so erhält man einen Bogen, welcher größer, oder kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist. Im ersten Falle ist $\sin \frac{1}{2} a > \cos \frac{1}{2} a$, und man nimmt in den obigen Formeln die untern Zeichen; im zweiten Falle ist $\sin \frac{1}{2} a < \cos \frac{1}{2} a$, und man nimmt die obern Zeichen.

Wird z. B. $\cos \frac{\pi}{12}$ und $\sin \frac{\pi}{12}$ gesucht, wenn $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ gegeben ist; so hat man:

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}},$$
$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Aus diesen Werthen von $\cos \frac{\pi}{12}$ und $\sin \frac{\pi}{12}$ lassen sich leicht die in §. 49. gefundenen ableiten. —

§. 51. Wenn man in der Formel (§. 44.):

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

$^1/_3$ a statt a setzt, so erhält man:

$$\cos a = 4 \cos^3 \frac{a}{3} - 3 \cos \frac{a}{3}.$$

Man soll $\cos \frac{a}{3}$ finden, wenn $\cos a$ gegeben ist. —

Es sei $\cos a = A$ und $\cos \frac{a}{3} = x$, so gibt die letzte Gleichung:

$$x^3 - \frac{3}{4} x - \frac{A}{4} = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung des dritten Grades hat nach algebraischen Lehren drei reelle Wurzeln, was sich auch auf folgende Weise darthun läßt: Es sei α ein bestimmter Bogen, dessen Cosinus $= A$ ist, so werden die Werthe von a durch die Formel:

$$a = 2 k \pi \pm \alpha$$

gegeben, und die Werthe von x sind folglich:

$$x = \cos \left(\frac{2 k \pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right),$$

wo man k alle ganzen Werthe beilegen muß, welche positiv, null, oder negativ sind. Nun kann man aber, was k auch sein mag, doch immer setzen:

$$k = 3q + i,$$

wo i eine der Zahlen 0, 1, 2 bedeutet. Man hat folglich:

$$x = \cos\left(2 q \pi + \frac{2 i \pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos \left(\frac{2 i \pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right),$$

woraus folgt: daß x die sechs Werthe hat:

$$\cos \frac{\alpha}{3},\ \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),\ \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

$$\cos\left(\frac{-\alpha}{3}\right),\ \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right),\ \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right),$$

wovon aber die drei ersten resp. den drei letzten gleich sind; denn die Bogen $\frac{\alpha}{3}$, $\frac{-\alpha}{3}$ haben gleiche Cosinus, und dasselbe gilt von den Bogen:

$$\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3} \text{ und } \frac{4\pi}{3} \mp \frac{\alpha}{3},$$

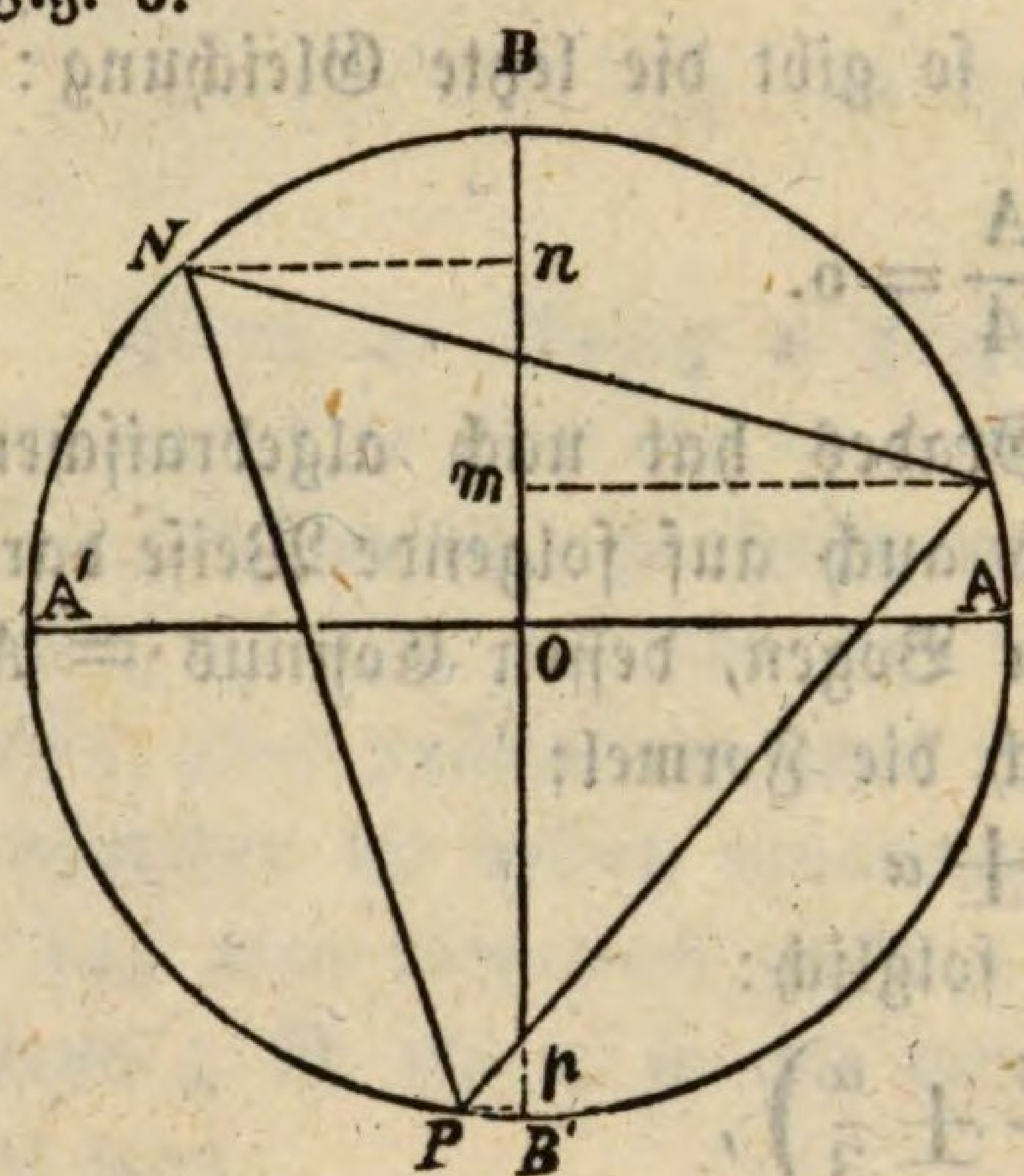
deren Summe $= 2\pi$ ist. — Die Gleichung (4) hat also die drei reellen Wurzeln:

$$\cos\frac{\alpha}{3},\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\ \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),$$

welche im Allgemeinen ungleich sind.

Es sei α der kleinste positive Bogen, dessen Cosinus $= A$ ist, so ist $\alpha \leqq \pi$. Nimmt man nun von dem Anfangspunkte A

Fig. 5.



(Fig. 5) aus den Bogen $AM = \frac{\alpha}{3}$ und beschreibt das gleichseitige Dreieck MNP in den Kreis; so drücken die von den drei Winkelspitzen auf den Durchmesser BB' gefällten Perpendikel die drei Wurzeln der Gleichung (4) aus, indem diese Perpendikel mit dem Zeichen $+$, oder $-$ genommen werden, je nachdem sie mit A auf derselben Seite von BB, liegen, oder nicht. — Außerdem muß die Summe dieser drei Wurzeln $= 0$ sein, weil das zweite Glied der Gleichung (4) fehlt, woraus sich ein bekannter geometrischer Lehrsatz ergibt.

Es läßt sich auch leicht direkt zeigen: daß die Summe der drei Wurzeln der Gleichung (4) gleich Null ist. Denn diese Summe ist:

$$\cos\frac{\alpha}{3} + \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)$$

oder:

$$\cos\frac{\alpha}{3}\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right) - \sin\frac{\alpha}{3}\left(\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

und da außerdem ist:

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\tfrac{1}{2},$$

$$\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{2\pi}{3},$$

so leuchtet ein: daß die fragliche Summe $= 0$ ist.

§. 52. Die Gleichung (4) hat zwei negative und eine positive Wurzel, wenn A positiv oder $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, wogegen sie zwei positive und eine negative Wurzel hat, wenn A negativ oder $\alpha > \frac{\pi}{2}$ ist.

Denn es sei wieder $AM = \frac{\alpha}{3}$ (Fig. 5) und Bogen $MN = \frac{2\pi}{3}$, so fällt der Punkt N offenbar auf den Halbkreis BA′B′, und man hat $BN = AM + \frac{\pi}{6}$. Wenn nun A positiv ist, so ist $\alpha < \frac{\pi}{2}$ und folglich $BN < \frac{\pi}{3}$. Nimmt man also den Bogen $NA'P = \frac{2\pi}{3}$, so fällt der Punkt P auf den Halbkreis BA′B′, woraus folgt: daß die Gleichung (4) zwei negative und eine positive Wurzel hat. — Wenn A negativ ist, so hat man $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; folglich $\frac{\pi}{3} < BN < \frac{\pi}{2}$. Der Punkt N fällt also auf den Quadranten BA′, und da sein Abstand vom Punkte B größer als $\frac{\pi}{3}$ ist; so fällt der Punkt P, wenn man $NA'P = \frac{2\pi}{3}$ nimmt, in den Quadranten B′A, woraus erhellet: daß die Gleichung (4) zwei positive und eine negative Wurzel hat.

Es ist leicht einzusehen: daß von den beiden Wurzeln mit demselben Zeichen die eine zwischen o und ½ und die andere zwischen ½ und 1 liegt, insofern man blos auf den absoluten Werth derselben sieht. Denn diese absoluten Werthe sind nichts anders, als die Längen Nn, Pp, welche man als die Sinus der Bogen NB, PB′ betrachten kann, deren Summe $= \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ ist; folglich ist der eine dieser Bogen kleiner und der andere größer als $\frac{\pi}{6}$, mithin die eine der Längen Nn, Pp kleiner und die andere größer als $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$. Der absolute Werth der dritten Wurzel der Gleichung (4) ist größer als ½, weil sie der Summe der absoluten Werthe der beiden andern Wurzeln gleich ist.

Wenn also A in der Gleichung (4) den Cosinus eines gegebenen Bogens a bezeichnet, so kann man immer wissen, welche der drei Wurzeln dieser Gleichung $= \cos \frac{a}{3}$ ist; denn das Zeichen dieses Cosinus ist zum Voraus bekannt, und man weiß auch, ob sein absoluter Werth kleiner, oder größer als ½ ist.

§. 53. Man soll $\sin \frac{a}{3}$ finden, wenn $\sin a$ gegeben ist. — Wenn man in der Gleichung:

$$\sin 3 a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$\frac{a}{3}$ statt a setzt, so erhält man:

$$\sin a = 3 \sin \frac{a}{3} - 4 \sin^3 \frac{a}{3}.$$

Setzt man weiter $\sin a = A$ und $\sin \frac{a}{3} = x$, so erhält man die Gleichung:

$$(5) \qquad x^3 - \frac{3}{4} x + \frac{A}{4} = o,$$

welche sich aus der Gleichung (4) ergibt, wenn man A in — A verwandelt.

Um die Bedeutung der drei Wurzeln der Gleichung (5) kennen zu lernen, sei α ein bestimmter Bogen, dessen Sinus = A ist; so werden die Werthe von a durch die Formeln:

$$a = 2 k \pi + \alpha,\ a = (2 k + 1) \pi - \alpha,$$

und die Werthe von x durch:

$$x = \sin \left(\frac{2 k \pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),\ x = \sin \left(\frac{2 k + 1}{3} \pi - \frac{\alpha}{3}\right)$$

gegeben.

Es sei $k = 3 q + i$, wo i eine der Zahlen 0, 1, 2 bedeutet; so werden die letzten Formeln:

$$x = \sin \left(2 q \pi + \frac{2 i \pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \sin \left(\frac{2 i \pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

$$x = \sin \left(2 q \pi + \frac{2 i + 1}{3} \pi - \frac{\alpha}{3}\right) = \sin \left(\frac{2 i + 1}{2} \pi - \frac{\alpha}{3}\right),$$

woraus folgt: daß x die 6 Werthe hat:

$$\sin\frac{\alpha}{3},\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right),\ \sin\left(\frac{3\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right),\ \sin\left(\frac{5\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}\right),$$

wovon aber die 3 letzten den 3 ersten resp. gleich sind, weil die Summe der Bogen $\frac{\alpha}{3}$ und $\frac{3\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ und $\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$, $\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ und $\frac{5\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$ eine ungerade Anzahl halber Kreisumfänge beträgt, und folglich diese Bogen einerlei Sinus haben. — Die Gleichung (5) hat also nur die 3 reellen Wurzeln:

$$\sin\frac{\alpha}{3},\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\ \sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Ueber diese Aufgabe lassen sich ähnliche Bemerkungen machen, wie in §§. 51. und 52. —

§. 54. Allgemein, soll man $\sin\frac{a}{m}$, oder $\cos\frac{a}{m}$ finden, wenn $\sin a$, oder $\cos a$ gegeben ist, so bildet man zuerst die Gleichung, welche $\sin ma$, oder $\cos ma$ als Funktion von $\sin a$, oder $\cos a$ gibt, und setzt dann in dieser Gleichung $\frac{a}{m}$ statt a; so erhält man die Gleichung, von deren Auflösung die gesuchte Größe abhängt. Diese Gleichung ist, je nach den Umständen, vom m^{ten}, oder vom $2m^{ten}$ Grade, und wir werden später auf diese wichtige Untersuchung näher eingehen; allein wir wollen schon hier bemerken: daß die Bestimmung von $\sin\frac{a}{m}$, oder $\cos\frac{a}{m}$ nur von Gleichungen des 2^{ten} Grades abhängt, wenn m eine Potenz von 2 ist.

Denn nachdem man durch das Verfahren in §§. 48. und 50. $\sin\frac{1}{2}a$ und $\cos\frac{1}{2}a$ als Funktion von $\sin a$, oder $\cos a$ gefunden hat, kann man ebenso $\sin\frac{a}{4}$ und $\cos\frac{a}{4}$, $\sin\frac{a}{8}$ und $\cos\frac{a}{8}$, . . . finden.

§. 55. Tangenten und Cotangenten. — Man soll $\tan\frac{1}{2}a$ finden, wenn $\tan a$ gegeben ist. — Wenn man in der Gleichung:

$$\text{tang } 2a = \frac{2\,\text{tang } a}{1-\text{tang}^2 a}$$

$\frac{1}{2}a$ für a setzt, so erhält man:

$$\tang a = \frac{2 \tang \frac{1}{2} a}{1 - \tang^2 \frac{1}{2} a}.$$

Setzt man nun tang a = A und tang ½ a = x, so ergibt sich aus der letzten Gleichung:

$$(6) \qquad x^2 + \frac{2}{A} x - 1 = o.$$

Die Aufgabe hängt also von einer Gleichung des zweiten Grades ab, und das Produkt der beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung ist stets = — 1, was A auch sein mag. Um die Bedeutung dieser Wurzeln kennen zu lernen, sei α ein bestimmter Bogen, dessen Tangente = A ist; so werden die Werthe von a durch die Formel:

$$a = k\pi + \alpha$$

gegeben, und die von x durch:

$$x = \tang (k \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \alpha).$$

Nimmt man für k eine gerade Zahl 2 q, so gibt die letzte Formel:

$$x = \tang (q\pi + \frac{1}{2} \alpha) = \tang \frac{1}{2} \alpha,$$

und wenn man für k eine ungerade Zahl 2 q + 1 nimmt:

$$x = \tang (q\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \alpha) = \tang (\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \alpha)$$
$$= \cot (- \frac{1}{2} \alpha) = - \cot \frac{1}{2} \alpha.$$

Hieraus folgt: daß x die beiden Werthe tang ½ α, — cot ½ α hat, deren Produkt in der That = — 1 ist.

Wenn der Bogen a gegeben ist, so gibt die Gleichung (6) auch tang ½ a, weil man das Zeichen zum Voraus kennt. Soll z. B. tang $\frac{\pi}{8}$ gefunden werden, wenn tang $\frac{\pi}{4}$ = 1 bekannt ist; so setzt man A = 1, und alsdann wird die Gleichung (6):

$$x^2 + 2x - 1 = o,$$

deren positive Wurzel:

$$x = \tang \frac{\pi}{8} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}$$

ist.

Man kann tang ½ a auch sehr leicht als Funktion von sin a und cos a ausdrücken; denn man hat:

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{2 \cos^2 \frac{1}{2} a}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} a}{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a},$$

und wenn man die Formeln (1) und (1′) beachtet:

(7) $$\text{tang } \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a},$$

oder wenn man $\sqrt{1 - \cos^2 a}$ statt sin a setzt:

(8) $$\text{tang } \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

Wenn also tang a gegeben ist, so kann man nach dem Obigen successive die Werthe von tang $\frac{a}{4}$, tang $\frac{a}{8}$, ... finden. Man kann auch direkt tang $\frac{a}{2^m}$ suchen, wodurch man eine Gleichung vom 2^mten Grade erhält, deren Auflösung sich immer durch die von Gleichungen des zweiten Grades bewerkstelligen läßt.

§. 56. Man soll tang $\frac{a}{3}$ finden, wenn tang a gegeben ist. — Wenn man in der Gleichung:

$$\text{tang } 3 a = \frac{3 \text{ tang } a - \text{tang}^3 a}{1 - 3 \text{ tang}^2 a}$$

$\frac{a}{3}$ statt a setzt, so erhält man:

$$\text{tang } a = \frac{3 \text{ tang } \frac{a}{3} - \text{tang}^3 \frac{a}{3}}{1 - 3 \text{ tang}^2 \frac{a}{3}},$$

und wenn man tang a = A, tang $\frac{a}{3}$ = x setzt:

(9) $$A = \frac{3 x - x^3}{1 - 3 x^2},$$

oder:

(10) $$x^3 - 3 A x^2 - 3 x + A = o.$$

Die Aufgabe ist also von einer Gleichung des 3ten Grades abhängig, und um zu erfahren, was die Wurzeln dieser Gleichung bedeuten, sei α ein bestimmter Bogen, dessen Tangente = A ist; so werden die Werthe von a durch die Formel:

$$a = k \pi + \alpha$$

gegeben, und die von x durch die Formel:

$$x = \text{tang}\left(\frac{k\,\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right).$$

Setzt man $k = 3\,q + i$, wo i eine der Zahlen 0, 1, 2 bedeutet; so wird die letzte Gleichung:

$$x = \text{tang}\left(q\,\pi + \frac{i\,\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \text{tang}\left(\frac{i\,\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

und hieraus folgt: daß x nur die 3 Werthe hat:

$$\text{tang}\,\frac{\alpha}{3},\ \text{tang}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),\ \text{tang}\left(\frac{2\,\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right). \qquad (\mu)$$

Wenn der gegebene Werth von $A = \infty$ ist, so reducirt sich die Gleichung (9) auf folgende:

$$3\,x^2 - 1 = o,$$

welche nur die beiden Wurzeln $+\frac{1}{\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ hat, und da zugleich $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist; so reduciren sich die Wurzelausdrücke (μ) auf:

$$\text{tang}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{tang}\,\frac{\pi}{2} = \infty,\ \text{tang}\,\frac{5\,\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Man kann auch leicht zwei Grenzen finden, zwischen welchen jede der Wurzeln der Gleichung (10) liegt. — Denn es sei α der kleinste positive Bogen, dessen Tangente = A ist, und zuerst $A > o$ oder $\alpha < \frac{\pi}{2}$; so liegt der Bogen $\frac{\alpha}{3}$ zwischen o und $\frac{\pi}{6}$; seine Tangente also zwischen o und $\frac{1}{\sqrt{3}}$, der Bogen $\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$ zwischen $\frac{\pi}{3}$ und $\frac{\pi}{2}$, also seine Tangente zwischen $\sqrt{3}$ und ∞, und endlich der Bogen $\frac{2\,\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$ zwischen $\frac{2\,\pi}{3}$ und $\frac{5\,\pi}{6}$, also seine negative Tangente zwischen $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\sqrt{3}$, dem absoluten Werthe nach. — Nun sei $A < o$ oder $\alpha > \frac{\pi}{2}$ und $\alpha < \pi$; so liegt der Bogen $\frac{\alpha}{3}$ zwischen $\frac{\pi}{6}$ und $\frac{\pi}{3}$, also seine Tangente zwischen $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\sqrt{3}$; der Bogen $\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{2\,\pi}{3}$, folglich ist seine

Tangente negativ und ihr absoluter Werth liegt zwischen ∞ und $\sqrt{3}$. Endlich liegt der Bogen $\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}$ zwischen $\frac{5\pi}{6}$ und π; folglich ist seine Tangente negativ und ihr absoluter Werth liegt zwischen o und $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Hieraus folgt: daß die Gleichung (10) zwei positive und eine negative, oder zwei negative und eine positive Wurzel hat, und daß von den absoluten Werthen der gleichbezeichneten Wurzeln der eine kleiner als $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und der andere größer als $\sqrt{3}$ ist; also der eine kleiner und der andere größer als 1. Wenn also der Bogen a gegeben ist, so kann man immer bestimmen, welche der Wurzeln der Gleichung (10), $\tang \frac{a}{3}$ ausdrückt, weil das Zeichen dieser Tangente zum Voraus bekannt ist, und man auch weiß, ob ihr absoluter Werth $\lessgtr 1$ ist.

Allgemein, wenn $\tang \frac{a}{m}$ gesucht wird und tang a gegeben ist, so bildet man zuerst die Gleichung, welche tang m a als Funktion von tang a gibt, und wenn man alsdann a in $\frac{a}{m}$ umsetzt; so erhält man eine Gleichung vom m^{ten} Grade, von deren Auflösung die Unbekannte abhängt.

Endlich ergeben sich aus dem Vorhergehenden auch leicht die Werthe von $\cot \frac{a}{m}$ als Funktionen von cot a, weil:

$$\cot \frac{a}{m} = \frac{1}{\tang \frac{a}{m}} \text{ und } \cot a = \frac{1}{\tang a}$$

ist. —

Zusammengesetzte inverse oder cyclometrische Funktionen.

§. 56[a]. 1) Man soll die Summe, oder Differenz arc sin (y) $\pm$ arc sin (z) finden, wenn unter arc sin (y) und arc sin (z) die kleinsten Bogen verstanden werden, deren Sinus resp. $= y$ und $= z$ ist.

Setzt man arc sin (y) = Y und arc sin (z) = Z, also $y = \sin Y$ und $z = \sin Z$, sowie $\cos Y = \sqrt{1 - y^2}$, $\cos Z = \sqrt{1 - z^2}$; so ist (§. 35.):

$$\sin(Y + Z) = \sin Y \cos Z + \cos Y \sin Z$$
$$= y\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - y^2},$$

also:

$$Y + Z = \text{arc sin}\,(y\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - y^2}),$$

wenn $Y + Z$ nicht über $\frac{\pi}{2}$, oder $-\frac{\pi}{2}$ hinausgeht. — Wenn $Y + Z$ über $\frac{\pi}{2}$ hinausgeht, so ist:

$$Y + Z = \pi - \text{arc sin}\,(y\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - y^2}),$$

und wenn $Y + Z$ über $-\frac{\pi}{2}$ hinausgeht; so ist:

$$Y + Z = -\pi - \text{arc sin}\,(y\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - y^2}),$$

weil dieses die kleinsten Bogen sind, deren Sinus $= y\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - y^2}$ ist. — Soll aber der Bogen $Y + Z$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ liegen, so muß $\cos(Y + Z)$ positiv sein, d. h.:

$\cos Y \cos Z - \sin Y \sin Z = \sqrt{1 - y^2}\,.\sqrt{1 - z^2} - yz > o$, welche Bedingung sich auf $y^2 + z^2 < 1$ reducirt, wenn y, z beide positiv sind. — Wenn:

$$\cos(Y + Z) = \sqrt{1 - y^2}\,.\sqrt{1 - z^2} - yz < o$$

ist, so liegt der Bogen $Y + Z$ nicht zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, sondern über $+\frac{\pi}{2}$ hinaus, wenn y, z beide positiv und über $-\frac{\pi}{2}$ hinaus, wenn y, z beide negativ sind.

Hiernach ist mithin:

$$\left.\begin{array}{l} Y + Z = \text{arc sin}\,(y) + \text{arc sin}\,(z) \\ = \text{arc sin}\,(y\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - y^2}),\ \text{wenn} \\ \qquad \sqrt{1 - y^2}\,.\sqrt{1 - z^2} > yz, \\ = \pi - \text{arc sin}\,(y\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - y^2}),\ \text{wenn} \\ \qquad \sqrt{1 - y^2}\,.\sqrt{1 - z^2} < yz\ \text{und}\ y = +, z = + \\ = -\pi - \text{arc sin}\,(y\sqrt{1 - z^2} + z\sqrt{1 - y^2}),\ \text{wenn} \\ \qquad \sqrt{1 - y^2}\,.\sqrt{1 - z^2} < yz\ \text{und}\ y = -, z = - \end{array}\right\} \quad (1)$$

Ferner ist:

$$\sin(Y - Z) = \sin Y \cos Z - \cos Y \sin Z$$
$$= y\sqrt{1 - z^2} - z\sqrt{1 - y^2},$$

also:

$$Y - Z = \text{arc}\sin(y\sqrt{1 - z^2} - z\sqrt{1 - y^2}),$$

wenn $Y - Z$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, also $\cos(Y - Z)$ positiv, oder:

$$\sqrt{1 - y^2}\,.\,\sqrt{1 - z^2} + yz > 0$$

ist; u. s. w. Es ist folglich:

$$Y - Z = \text{arc}\sin(y) - \text{arc}\sin(z)$$
$$= \text{arc}\sin(y\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-y^2}),\ \text{wenn}\ \sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-z^2} > -yz$$
$$= \pi - \text{arc}\sin(y\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-y^2}),\ \text{wenn}\ \sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-z^2} < -yz\ \text{und}\ y = +,\ z = -,$$
$$= -\pi - \text{arc}\sin(y\sqrt{1-z^2} - z\sqrt{1-y^2}),\ \text{wenn}\ \sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-z^2} < -yz\ \text{und}\ y = -,\ z = +.$$

2) Man soll die Summe, oder Differenz:

$$\text{arc}\cos(y) \pm \text{arc}\cos(z)$$

finden, wenn unter arc cos (y), arc cos (z) die kleinsten Bogen gedacht werden, deren Cosinus resp. gleich y und gleich z ist.

Man setze $\text{arc}\cos(y) = Y$, $\text{arc}\cos(z) = Z$, so ist $y = \cos Y$, $z = \cos Z$, $\sin Y = \sqrt{1 - y^2}$, $\sin Z = \sqrt{1 - z^2}$ und:

$$\cos(Y + Z) = \cos Y \cos Z - \sin Y \sin Z$$
$$= yz - \sqrt{1 - y^2}\,.\,\sqrt{1 - z^2};$$

folglich:

$$Y + Z = \text{arc}\cos(yz - \sqrt{1 - y^2}\,.\,\sqrt{1 - z^2}),$$

wenn $Y + Z$ nicht über π hinausgeht, also $\sin(Y + Z)$ nicht negativ ist. — Wegen:

$$\sin(Y + Z) = \sin Y \cos Z + \cos Y \sin Z$$
$$= z\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - z^2}$$

muß also sein:

$$z\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - z^2} > 0.$$

Es ist demnach:

$$\left.\begin{aligned}
Y + Z &= \text{arc cos}\,(y) + \text{arc cos}\,(z) \\
&= \text{arc cos}\,(yz - \sqrt{1-y^2}\,.\,\sqrt{1-z^2}), \text{ wenn } z\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} > o, \\
&= 2\pi - \text{arc cos}\,(yz - \sqrt{1-y^2}\,.\,\sqrt{1-z^2}), \text{ wenn } z\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} < o \\
&= \pi, \text{ wenn } z\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} = o.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Ebenso ist:

$$\cos\,(Y - Z) = \cos Y \cos Z + \sin Y \sin Z$$
$$= yz + \sqrt{1-y^2}\,.\,\sqrt{1-z^2},$$

mithin:

$$Y - Z = \text{arc cos}\,(yz + \sqrt{1-y^2}\,.\,\sqrt{1-z^2}),$$

wenn $Y - Z$ zwischen o und π liegt, oder $\sin\,(Y - Z) = z\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-z^2} > o$ ist. — Es darf auch $Y - Z > \pi$ sein; wenn aber $Y - Z < o$ ist, so ist:

$$Y - Z = -\,\text{arc cos}\,(yz + \sqrt{1-y^2}\,.\,\sqrt{1-z^2}).$$

Es ist also:

$$\begin{aligned}
Y - Z &= \text{arc cos}\,(y) - \text{arc cos}\,(z) \\
&= \text{arc cos}\,(yz + \sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-z^2}), \text{ wenn } z\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-z^2} > o \\
&= -\,\text{arc cos}\,(yz + \sqrt{1-y^2}.\sqrt{1-z^2}), \text{ wenn } z\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-z^2} < o \\
&= o, \text{ wenn } z\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-z^2} = o \text{ oder } y = z \text{ ist.}
\end{aligned}$$

3) Man soll die Summe, oder Differenz arc tang $(y) \pm$ arc tang (z) finden, wenn arc tang (y), arc tang (z) die kleinsten Bogen bedeuten, deren Tangente resp. $= y$ und $= z$ ist. —

Man setze arc tang $(y) = Y$, arc tang $(z) = Z$, so daß $y = \text{tang}\, Y$, $z = \text{tang}\, Z$ ist; so hat man:

$$\text{tang}\,(Y + Z) = \frac{\text{tang}\, Y + \text{tang}\, Z}{1 - \text{tang}\, Y\, \text{tang}\, Z} = \frac{y + z}{1 - yz};$$

folglich:

$$Y + Z = \text{arc tang}\left(\frac{y + z}{1 - yz}\right),$$

wenn $Y + Z$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt, also $\cos\,(Y + Z) > o$ oder $\cos Y \cos Z > \sin Y \sin Z$ oder $1 > \text{tang}\, Y\, \text{tang}\, Z$, d. h. $1 > yz$ ist. — Geht $Y + Z$ über $\frac{\pi}{2}$ hinaus, so ist:

$$Y + Z = \pi + \text{arc tang}\left(\frac{y + z}{1 - y\,z}\right),$$

ferner $\cos(Y + Z) < o$, also $1 < y\,z$, indem $y = +$, $z = +$ ist. Geht $Y + Z$ über $-\frac{\pi}{2}$ hinaus, so ist wieder $1 < y\,z$; aber $y = -$, $z = -$ und:

$$Y + Z = -\pi + \text{arc tang}\left(\frac{y + z}{1 - y\,z}\right).$$

Man hat also:

$$\left.\begin{aligned} Y + Z &= \text{arc tang}(y) + \text{arc tang}(z) \\ &= \text{arc tang}\left(\frac{y + z}{1 - y\,z}\right), \text{ wenn } y\,z < 1 \\ &= \pi + \text{arc tang}\left(\frac{y + z}{1 - y\,z}\right), \text{ wenn } y\,z > 1 \text{ und } y = +, z = + \\ &= -\pi + \text{arc tang}\left(\frac{y + z}{1 - y\,z}\right), \text{ wenn } y\,z > 1 \text{ und } y = -, z = - \text{ ist.} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Für $y\,z = 1$ gilt der erste und zweite Werth, wenn $y = +$, $z = +$ ist, dagegen der erste und dritte Werth, wenn $y = -$, $z = -$ ist.

Ebenso ergibt sich:

$$\begin{aligned} Y - Z &= \text{arc tang}(y) - \text{arc tang}(z) \\ &= \text{arc tang}\left(\frac{y - z}{1 + y\,z}\right), \text{ wenn } -y\,z < 1 \\ &= \pi + \text{arc tang}\left(\frac{y - z}{1 + y\,z}\right), \text{ wenn } -y\,z > 1, y = + \text{ und } z = - \\ &= -\pi + \text{arc tang}\left(\frac{y - z}{1 + y\,z}\right), \text{ wenn } -y\,z > 1, y = - \text{ und } z = + \text{ ist.} \end{aligned}$$

4) Man soll die Summe, oder Differenz $\text{arc cotg}(y) \pm \text{arc cotg}(z)$ finden, wenn $\text{arc cotg}(y)$, $\text{arc cotg}(z)$ die kleinsten Bogen bezeichnen, deren Cotangente resp. $= y$ und $= z$ ist.

Setzt man $\text{arc cotg}(y) = Y$, $\text{arc cotg}(z) = Z$, so ist $y = \text{cotg}\,Y$, $z = \text{cotg}\,Z$ und:

$$\text{cotg}(Y + Z) = \frac{\text{cotg}\,Y\,\text{cotg}\,Z - 1}{\text{cotg}\,Y + \text{cotg}\,Z} = \frac{y\,z - 1}{y + z};$$

folglich:

$$Y + Z = \text{arc cotg}\left(\frac{y\,z - 1}{y + z}\right),$$

wenn $Y + Z$ zwischen o und π liegt, also $\sin(Y + Z) > o$ oder $\sin Y \cos Z + \cos Y \sin Z > o$ oder $\cot g\, Y + \cot g\, Z > o$, d. h. $y + z > o$. — Wenn $Y + Z > \pi$, so ist:

$$Y + Z = \pi + \text{arc cotg}\left(\frac{yz - 1}{y + z}\right) \text{ und } y + z < o.$$

Es ist also:

$$\left.\begin{aligned} Y + Z &= \text{arc cotg}(y) + \text{arc cotg}(z) \\ &= \text{arc cotg}\left(\frac{yz - 1}{y + z}\right), \text{ wenn } y + z > o \text{ oder } y > -z, \\ &= \pi + \text{arc cotg}\left(\frac{yz - 1}{y + z}\right), \text{ wenn } y + z < o \text{ oder } y < -z. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Ebenso findet man:

$$Y - Z = \text{arc cotg}(y) - \text{arc cotg}(z)$$

$$= \text{arc cotg}\left(\frac{yz + 1}{z - y}\right), \text{ wenn } z - y > o \text{ oder } z > y$$

$$= -\pi + \text{arc cotg}\left(\frac{yz + 1}{z - y}\right), \text{ wenn } z - y < o \text{ oder } z < y.$$

Setzt man in (1), $y = z$, so erhält man:

$$2 \text{ arc sin}(y) = \text{arc sin}(2y\sqrt{1-y^2}), \text{ wenn } 1 - y^2 > y^2 \text{ oder } 2y^2 < 1,$$

$$= \pi - \text{arc sin}(2y\sqrt{1-y^2}), \text{ wenn } 1-y^2 < y^2 \text{ oder } 2y^2 > 1 \text{ und } y = +,$$

$$= -\pi - \text{arc sin}(2y\sqrt{1-y^2}), \text{ wenn } 1-y^2 < y^2 \text{ oder } 2y^2 > 1 \text{ und } y = -.$$

Aus (2) folgt für $y = z$:

$$2 \text{ arc cos}(y) = \text{arc cos}(y^2 - [1 - y^2])$$

$$= \text{arc cos}(2y^2 - 1), \text{ wenn } 2y\sqrt{1-y^2} > o \text{ oder } y = +,$$

$$= 2\pi - \text{arc cos}(2y^2 - 1), \text{ wenn } 2y\sqrt{1-y^2} < o \text{ oder } y = -.$$

Aus (3) folgt für $y = z$:

$$2 \text{ arc tang}(y) = \text{arc tang}\left(\frac{2y}{1-y^2}\right), \text{ wenn } y^2 < 1,$$

$$= \pi + \text{arc tang}\left(\frac{2y}{1-y^2}\right), \text{ wenn } y^2 > 1 \text{ und } y = +,$$

$$= -\pi + \text{arc tang}\left(\frac{2y}{1-y^2}\right), \text{ wenn } y^2 > 1 \text{ und } y = -.$$

Endlich folgt aus (4) für $y = z$:

$$2 \text{ arc cotg}(y) = \text{arc cotg}\left(\frac{y^2 - 1}{2y}\right), \text{ wenn } y = +,$$

$$= \pi + \text{arc cotg}\left(\frac{y^2 - 1}{2y}\right), \text{ wenn } y = -.$$

Wir wollen nun noch einige andere hieher gehörige Formeln ableiten. Setzt man $y = \sin x$, also $x = \text{arc} \sin (y)$; so ist wegen:

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 x}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{2}}$$

offenbar:

$$\tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2} \text{arc} \sin (y) = \text{arc} \sin \left(\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{2}} \right),$$

also:

$$\text{arc} \sin (y) = 2 \text{ arc} \sin \left(\sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{2}} \right).$$

Ebenso ergibt sich:

$$\text{arc} \sin (y) = 2 \text{ arc} \cos \left(\sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{2}} \right).$$

Wegen:

$$\text{tang} \tfrac{1}{2} x = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$
$$= \frac{\sin x}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x}$$

ist offenbar:

$$x = 2 \text{ arc tang} \left(\frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \right) = 2 \text{ arc tang} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \right),$$

d. h.:

$$\text{arc} \sin (y) = 2 \text{ arc tang} \left(\frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \right) = 2 \text{ arc tang} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \right).$$

Setzt man ferner $y = \cos x$, also $x = \text{arc} \cos (y)$, so hat man:

$$\sin \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - y}{2}},$$

folglich:

$$x = 2 \text{ arc} \sin \left(\sqrt{\frac{1 - y}{2}} \right),$$

d. h.:

$$\text{arc} \cos (y) = 2 \text{ arc} \sin \left(\sqrt{\frac{1 - y}{2}} \right).$$

Wegen $\cos \tfrac{1}{2} x = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$ ergibt sich ebenso:

$$\text{arc cos}\,(y) = 2\,\text{arc cos}\left(\sqrt{\frac{1+y}{2}}\right),$$

und wegen:

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,x = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

hat man:

$$\text{arc cos}\,(y) = 2\,\text{arc tang}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right).$$

u. s. f.

Ferner hat man:

$\text{arc sin}\,(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$, indem x zwischen o und π liegt,

$\text{arc cos}\,(\sin x) = \frac{\pi}{2} - x$, ″ x ″ $-\frac{\pi}{2}$ ″ $+\frac{\pi}{2}$ liegt,

$\text{arc tang}\,(\text{cotg}\,x) = \frac{\pi}{2} - x$, ″ x ″ o ″ π ″

$\text{arc cotg}\,(\text{tang}\,x) = \frac{\pi}{2} - x$, ″ x ″ $-\frac{\pi}{2}$ ″ $+\frac{\pi}{2}$ ″

$\text{arc sin}\,(-\cos x) = x - \frac{\pi}{2}$, ″ x ″ o ″ π ″

$\text{arc cos}\,(-\sin x) = x + \frac{\pi}{2}$, ″ x ″ $-\frac{\pi}{2}$ ″ $+\frac{\pi}{2}$ ″

$\text{arc tang}\,(-\text{cotg}\,x) = x - \frac{\pi}{2}$, ″ x ″ o ″ π ″

$\text{arc cotg}\,(-\text{tang}\,x) = x + \frac{\pi}{2}$, ″ x ″ $-\frac{\pi}{2}$ ″ $+\frac{\pi}{2}$ ″

Endlich könnte man leicht umgekehrt arc sin $(y+z)$, arc tang $(y+z)$, ... in eine Summe zweier Bogen zerlegen, so daß man hätte:

$$\text{arc sin}\,(y+z) = \text{arc sin}\,(f[y,z]) + \text{arc sin}\,(f'[y,z]),$$
$$\text{arc tang}\,(y+z) = \text{arc tang}\,(\varphi[y,z]) + \text{arc tang}\,(\varphi'[y,z]),$$

u. s. f.

§. 57. Imaginäre Ausdrücke. — Wir setzen hier die Gauß'sche Theorie der imaginären Ausdrücke von der Form:

$$A + Bi,$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist, als bekannt voraus,*) und wollen zunächst zeigen: daß jeder solcher Ausdruck auf die Form:

$$r\,(\cos a + i \sin a)$$

gebracht werden kann, wo r eine reelle positive Zahl, Modulus genannt, und a ein reeller Bogen ist, welcher das Argument heißt. — Zu dem Zwecke braucht man nur zu setzen:

$$A = r \cos a\,,\ B = r \sin a\,,$$

woraus folgt:

$$r = + \sqrt{A^2 + B^2},$$

und:

$$\cos a = \frac{A}{+\sqrt{A^2 + B^2}}\,,\ \sin a = \frac{B}{+\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Alsdann ist:

$$A + B\,i = r\,(\cos a + i \sin a).$$

Der Modulus eines auf die letzte Form gebrachten gegebenen imaginären Ausdruckes ist völlig bestimmt; aber das Argument nicht; denn ein imaginärer Ausdruck wird nicht geändert, wenn man zu seinem Argumente eine beliebige Anzahl ganzer Kreisumfänge addirt, oder davon subtrahirt.

Positive oder negative reelle Zahlen können als imaginäre Ausdrücke betrachtet werden, deren Modulus ihrem absoluten Werthe gleich ist, und deren Argument eine gerade, oder ungerade Anzahl halber Kreisumfänge beträgt. Denn es sei A eine positive Zahl, so hat man für jeden Werth der ganzen Zahl k:

$$+ A = A\,(\cos 2\,k\,\pi + i \sin 2\,k\,\pi)\,,$$
$$- A = A\,[\cos (2\,k + 1)\,\pi + i \sin (2\,k + 1)\,\pi].$$

Wenn zwei imaginäre Ausdrücke:

$$r\,(\cos a + i \sin a)\,,\ r'\,(\cos a' + i \sin a')$$

einander gleich sein sollen, so daß man hat:

$$r\,(\cos a + i \sin a) = r'\,(\cos a' + i \sin a')\,,$$

so muß sein:

$$r \cos a = r' \cos a',\ r \sin a = r' \sin a',$$

woraus folgt, wenn man zum Quadrate erhebt und addirt:

$$r^2 = r'^2 \text{ also } r = r'.$$

---

*) Vergl. Höhere Analysis S. 224 folg., oder: Theorie der Gleichungen S. 15 folg.

Alsdann ist aber:

$$\cos a = \cos a', \sin a = \sin a';$$

folglich:

$$a = a', \text{ oder } a = a' \pm 2\,k\,\pi,$$

d. h. wenn zwei imaginäre Ausdrücke einander gleich sein sollen, so müssen ihre Moduli gleich, und ihre Argumente ebenfalls gleich, oder um ein Vielfaches von $2\,\pi$ verschieden sein.

Zwei imaginäre Ausdrücke wie:

$$A + B\,i, \; A - B\,i$$

heißen conjugirte. Ihre Argumente haben gleiche Cosinus, während die Sinus derselben gleich und entgegengesetzt sind, so daß folglich die Summe dieser Argumente ein Vielfaches von $2\,\pi$ ist.

§. 58. **Moivre's Formel für einen ganzen positiven Exponenten.** — Wenn man zwei imaginäre Ausdrücke von dem Modulus 1, nämlich:

$$\cos a + i \sin a, \; \cos b + i \sin b$$

miteinander multiplicirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = {} & \cos a \cos b \\ & + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b) \\ & + i^2 \sin a \sin b,\end{aligned}$$

oder wegen $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned}(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = {} & \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ & + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b).\end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b)$$

und:

$$\sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin(a + b);$$

folglich:

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos(a + b) + i \sin(a + b).$$

Hiernach ist also:

$$r(\cos a + i \sin a) \times r'(\cos b + i \sin b) = rr'(\cos[a + b] + i \sin[a + b])$$

Das Produkt zweier imaginärer Ausdrücke ist also ein imaginärer Ausdruck, dessen Modulus das **Produkt** der Moduli und dessen Argument die **Summe** der Argumente der Faktoren ist.

Hieraus folgt weiter für eine beliebige Anzahl m imaginärer Ausdrücke von dem Modulus 1:

$$\begin{aligned}& (\cos a + i \sin a) \,.\, (\cos b + i \sin b) \,.\, (\cos c + i \sin c) \,.\,.\,.\,.\,. \\ & = \cos(a + b + c + \ldots) + i \sin(a + b + c + \ldots).\end{aligned}$$

Setzt man in dieser letzten Gleichung $a = b = c = \ldots$, so ergibt sich daraus:

$$(\cos a + i \sin b)^m = \cos ma + i \sin ma;$$

und für einen beliebigen Modulus r:

$$(\mu) \qquad (r[\cos a + i \sin a])^m = r^m (\cos ma + i \sin ma),$$

d. h. um einen imaginären Ausdruck $r(\cos a + i \sin a)$ zur m^{ten} Potenz zu erheben, wo m eine ganze positive Zahl ist, muß man den Modulus auf diese Potenz erheben und das Argument mit dem Exponenten multipliciren.

Hierin besteht der Moivre'sche Satz, oder in der Gleichheit (μ) die Moivre'sche Formel.

Multiplikation der Bogen.

§. 59. Die Moivre'sche Formel gibt unmittelbar die Werthe von $\cos ma$ und $\sin ma$ als Funktionen von $\cos a$ und $\sin a$; denn wenn man den zweiten Theil der Gleichheit:

$$\cos ma + i \sin ma = (\cos a + i \sin a)^m$$

nach dem binomischen Satze entwickelt, so erhält man:

$$\cos ma + i \sin ma = \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2} a \sin^2 a +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{m-4} a \sin^4 a - \ldots$$
$$+ i \left[\frac{m}{1} \cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} a \sin^3 a\right.$$
$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{m-5} a \sin^5 a - \ldots\right],$$

d. h.:

$$(1) \begin{cases} \cos ma = \cos^m a - \dfrac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos^{m-2} a \sin^2 a \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^{m-4} a \sin^4 a - \ldots, \\ \sin ma = m \cos^{m-1} a \sin a - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos^{m-3} a \sin^3 a \\ \qquad + \dfrac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cos^{m-5} a \sin^5 a - \ldots \end{cases}$$

Diese Gleichungen geben $\cos ma$ und $\sin ma$ als Funktionen von $\cos a$ und $\sin a$, und wenn man darin $\sqrt{1 - \cos^2 a}$ für

sin a und $\sqrt{1 - \sin^2 a}$ für cos a setzt; so erhält man cos ma und sin ma resp. als Funktion von cos a oder sin a.

Die Glieder im zweiten Theile der Gleichungen (1) sind in Bezug auf cos a und sin a sämmtlich vom Grade m. Die erste dieser beiden Gleichungen enthält nur gerade Potenzen von sin a und nur gerade, oder ungerade Potenzen von cos a, je nachdem m gerade, oder ungerade ist. — Die zweite Gleichung dagegen enthält nur ungerade Potenzen von sin a und nur ungerade, oder gerade Potenzen von cos a, je nachdem m gerade, oder ungerade ist. — Hieraus folgt: 1) daß sich cos ma und $\frac{\sin ma}{\sin a}$ durch ganze rationale Funktionen von cos a ausdrücken lassen, indem die erste vom Grade m und die zweite vom Grade m — 1 ist; daß sich cos ma und $\frac{\sin ma}{\cos a}$, wenn m gerade ist, oder sin ma und $\frac{\cos ma}{\cos a}$, wenn m ungerade ist, durch ganze rationale Funktionen von sin a, resp. von dem Grade m und m — 1, ausdrücken lassen.

§. 60. Wenn man in der Gleichheit:

$$\cos ma + i \sin ma = (\cos a + i \sin a)^m$$

a in — a verwandelt, so kommt:

$$\cos ma - i \sin ma = (\cos a - i \sin a)^m,$$

und aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \cos ma &= \frac{(\cos a + i \sin a)^m + (\cos a - i \sin a)^m}{2}, \\ i \sin ma &= \frac{(\cos a + i \sin a)^m - (\cos a - i \sin a)^m}{2}, \end{aligned} \right.$$

welche Werthe von cos ma und sin ma oft mit Vortheil angewandt werden.

§. 61. Wenn man die zweite der Gleichungen (1) durch die erste dividirt, so erhält man:

$$\frac{\sin ma}{\cos ma} = \frac{m \cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} a \sin^3 a + \ldots}{\cos^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} a \sin^2 a + \ldots}$$

$$= \frac{m \frac{\sin a}{\cos a} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \frac{\sin^3 a}{\cos^3 a} + \ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2} \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \ldots},$$

d. h.:

$$(3)\ \tang ma = \frac{m \tang a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \tang^3 a + \ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2} \tang^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \tang^4 a - \ldots},$$

welche Formel tang ma als rationale Funktion von tang a gibt.

Moivre's Formel für einen beliebigen Exponenten.

§. 62. Da:

$$\cos a + i \sin a = \left(\cos \frac{a}{n} + i \sin \frac{a}{n}\right)^n,$$

und:

$$\cos ma + i \sin ma = \left(\cos \frac{m}{n} a + i \sin \frac{m}{n} a\right)^n$$

ist, so ist:

$$\sqrt[n]{\cos a + i \sin a} = \cos \frac{a}{n} + i \sin \frac{a}{n},$$

und:

$$\sqrt[n]{(\cos a + i \sin a)^m} = \sqrt[n]{\cos ma + i \sin ma}$$

oder:

$$(\cos a + i \sin a)^{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n} a + i \sin \frac{m}{n} a.$$

Dieses ist die Moivre'sche Formel für einen gebrochenen Exponenten $\frac{m}{n}$.

Die Moivre'sche Formel gilt auch für einen ganzen, oder gebrochenen negativen Exponenten $-m$; denn die Gleichung:

$$(\cos a + i \sin a)^m = \cos ma + i \sin ma$$

gibt für einen negativen Exponenten $-m$:

$$\frac{1}{(\cos a + i \sin a)^m} = \frac{1}{\cos ma + i \sin ma} = \frac{\cos ma - i \sin ma}{(\cos ma + i \sin ma)(\cos ma - i \sin ma)}$$
$$= \cos ma - i \sin ma,$$

oder:

$$(\cos a + i \sin a)^{-m} = \cos(-ma) + i \sin(-ma).$$

Ausdrücke der Potenzen des Sinus und Cosinus eines Bogens als lineare Funktion der Sinus und Cosinus der Vielfachen dieses Bogens.

§. 62ª. Es sei:

$$\cos a + i \sin a = u, \; \cos a - i \sin a = v,$$

so ist:

$$2 \cos a = u + v, \; 2 i \sin a = u - v,$$

und folglich:

$$2^n \cos^n a = (u + v)^n, \; (2i)^n \sin^n a = (u - v)^n,$$

oder entwickelt:

$$(1) \qquad 2^n \cos^n a = u^n + \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-2} v^2 + \ldots$$

$$(2) \qquad (2i)^n \sin^n a = u^n - \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{n-2} v^2 + \ldots$$

Betrachten wir zunächst die Gleichung (1). — Wenn m eine gerade Zahl ist, so enthält der zweite Theil dieser Gleichung ein mittleres Glied, und wenn man die gleichweit von den Enden abstehenden Glieder paarweise zusammenfaßt; so kommt:

$$2^n \cos^n a = (u^n + v^n) + \frac{n}{1} uv (u^{n-2} + v^{n-2}) + \ldots .$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+3\right)}{1 \cdot 2 \ldots \left(\frac{n}{2}-1\right)} u^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-1} (u^2 + v^2)$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1 \cdot 2 \ldots \frac{n}{2}} u^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}}.$$

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so hat der zweite Theil der Gleichung (1) eine gerade Anzahl von Gliedern, und wenn man wieder je zwei von den beiden Enden gleichweit abstehende Glieder in eins zusammenfaßt; so ergibt sich:

$$2^n \cos^n a = (u^n + v^n) + \frac{n}{1} uv(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2} u^2v^2(u^{n-4} + v^{n-4}) + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)} u^{\frac{n-1}{2}} v^{\frac{n-1}{2}} (u + v).$$

Nun ist aber:

$$uv = 1, \; u^m + v^m = 2 \cos ma,$$

und wenn n eine gerade Zahl ist, so hat man folglich:

$$(3) \qquad 2^{n-1} \cos^n a = \cos na + \frac{n}{1} \cos (n-2) a + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+3\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cos 2a$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2}.$$

Ist dagegen n eine ungerade Zahl, so hat man:

$$(4) \qquad 2^{n-1} \cos^n a = \cos na + \frac{n}{1} \cos (n-2) a$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2} \cos (n-4) a + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}} \cos a.$$

Betrachten wir jetzt die Gleichung (2). — Wenn n eine gerade Zahl ist, so enthält der zweite Theil dieser Gleichung eine ungerade Anzahl von Gliedern, und wenn man je zwei gleichweit von den Enden abstehende Glieder in eins zusammenfaßt; so erhält man:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} 2^n \sin^n a = (u^n + v^n) - \frac{n}{1} uv (u^{n-2} + v^{n-2})$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4}+v^{n-4})-\ldots$$

$$\pm\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+3\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}u^{\frac{n}{2}-1}v^{\frac{n}{2}-1}(u^2+v^2)$$

$$\mp\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}u^{\frac{n}{2}}v^{\frac{n}{2}},$$

oder:

$$(5)\qquad (-1)^{\frac{n}{2}}2^{n-1}\sin^n a=\cos na-\frac{n}{1}\cos(n-2)a$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)a-\ldots$$

$$\pm\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+3\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos 2a$$

$$\mp\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2}.$$

Wenn n eine ungerade Zahl ist, so hat der zweite Theil der Gleichung (2) eine gerade Anzahl von Gliedern, und wenn man die gleichweit von den Enden abstehenden Glieder paarweise in eins zusammenfaßt; so erhält man:

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}}2^n i\sin^n a=(u^n-v^n)-\frac{n}{1}uv(u^{n-2}-v^{n-2})$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4}-v^{n-4})$$

$$\pm\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n-1}{2}\right)}u^{\frac{n-1}{2}}v^{\frac{n-1}{2}}(u-v).$$

Ferner ist:

$$u^m-v^m=2i\sin ma,$$

folglich:

$$(6)\qquad (-1)^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{n-1} \sin^n a = \sin na - \frac{n}{1} \sin (n-2)\, a + \frac{n\,(n-1)}{1\,.\,2} \sin (n-4)\, a \pm \frac{n\,(n-1) \ldots \left(\frac{n+3}{2}\right)}{1\,.\,2 \ldots \left(\frac{n-1}{2}\right)} \sin a.$$

Aus dem Obigen sieht man: daß sich $\cos^n a$ immer durch eine lineare Funktion der Cosinus der Vielfachen von a, und $\sin^n a$ durch eine solche Funktion der Cosinus, oder Sinus der Vielfachen von a ausdrücken läßt, je nachdem n eine gerade, oder eine ungerade Zahl ist.

Entwickelung von sin x und cos x, tang x, cotg x, sec x und cosec x in Reihen, welche nach den steigenden ganzen, positiven Potenzen von x fortschreiten.

§. 63. Die Gleichungen (1) in §. 59. lassen sich auch wie folgt schreiben:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos ma = \cos^m a \left[1 - \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2} \tan^2 a + \ldots \pm \frac{m\,(m-1) \ldots (m-2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots 2n} \tan^{2n} a \mp R_{2n}\right], \\ \sin ma = \cos^m a \left[\frac{m}{1} \tan a - \frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \tan^3 a + \ldots \pm \frac{m\,(m-1) \ldots (m-2n)}{1\,.\,2 \ldots (2n+1)} \tan^{2n+1} a \mp R_{2n+1}\right], \end{cases}$$

wenn man setzt:

$$R_p = \frac{m \ldots (m-p-1)}{1\,.\,2 \ldots (p+2)} \tan^{p+2} a - \frac{m \ldots (m-p-3)}{1\,.\,2 \ldots (p+4)} \tan^{p+4} a + \ldots,$$

oder kürzer:

$$R_p = u_p - u_{p+1} + u_{p+2} - \ldots,$$

wo R_{2n} und R_{2n+1} die Fehler messen, welche man begeht, wenn die Reihen in (1) resp. mit den Gliedern mit $\tan^{2n} a$ und mit $\tan^{2n+1} a$ geschlossen werden.

Wir wollen zunächst die Grenzen dieser Fehler bestimmen, wenn der Bogen a zwischen o und $\frac{\pi}{4}$ liegt, also $\tan a < 1$ ist.

Man hat:

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{(m-p-2)(m-p-3)}{(p+3)(p+4)} \tang^2 a,$$

$$\frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} = \frac{(m-p-4)(m-p-5)}{(p+5)(p+6)} \tang^2 a,$$

$$\text{ꝛc.} \qquad\qquad \text{ꝛc.}$$

woraus erhellet: daß, wenn der erste dieser Brüche < 1 ist, die folgenden um so mehr < 1 werden, und die Glieder von R_p, deren Anzahl übrigens eine endliche ist, fortwährend abnehmen.

Nun kann man aber schreiben:

$$R_p = u_p - (u_{p+1} - u_{p+2}) - (u_{p+3} - u_{p+4}) - \ldots;$$

folglich ist:

$$R_p < u_p,$$

oder wenn ϑ eine zwischen o und 1 liegende Zahl bedeutet:

$$R_p = \vartheta\, u_p,$$

vorausgesetzt, daß die einzige Bedingung:

$$\frac{(m-p-2)(m-p-3)}{(p+3)(p+4)} \tang^2 a < 1$$

erfüllt wird, und wenn sie für $p = 2n$ erfüllt wird; so ist dieses für $p = 2n + 1$ umsomehr der Fall. — Die Gleichungen (1) können also folgendermaßen geschrieben werden:

$$(2)\left\{\begin{aligned}
\cos ma = \cos^m a \Big[1 &- \frac{m(m-1)}{1.2} \tang^2 a + \ldots \\
&\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-2n+1)}{1.2\ldots 2n} \tang^{2n} a \\
&\mp \Theta.\frac{m(m-1)\ldots(m-2n-1)}{1.2\ldots(2n+2)} \tang^{2n+2} a\Big], \\
\sin ma = \cos^m a \Big[\frac{m}{1} \tang a &- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \tang^3 a + \ldots \\
&\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-2n)}{1.2\ldots(2n+1)} \tang^{2n+1} a \\
&\mp \Theta.\frac{m(m-1)\ldots(m-2n-2)}{1.2\ldots(2n+3)} \tang^{2n+3} a\Big],
\end{aligned}\right.$$

wo Θ und Θ' zwei zwischen o und 1 liegende Zahlen bedeuten, auf welche sich ϑ für $p = 2n$ und $p = 2n + 1$ reducirt.

In den zweiten Theilen dieser Gleichungen ist die Anzahl der Glieder von m unabhängig, und kann dieselbe bleiben, wenn m sich ändert, wofern die Zahl n nur der Bedingung:

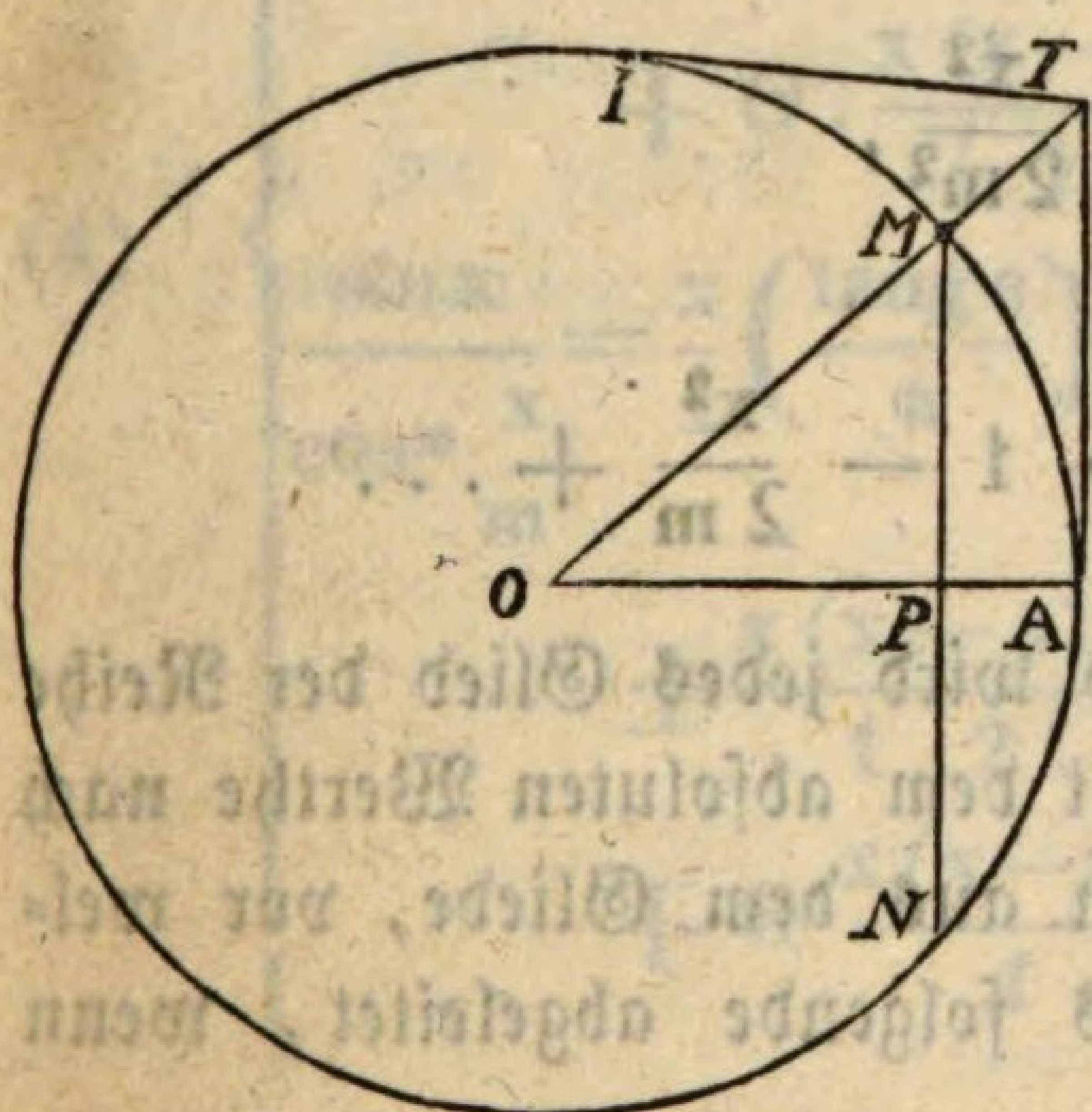
$$(3) \qquad \frac{(m-2n-2)(m-2n-3)}{(2n+3)(2n+4)} \tang^2 a < 1$$

genügt.

§. 64. Aus den Gleichungen (2) lassen sich nun leicht die Reihenentwickelungen von cos x und sin x ableiten; allein wir müssen zuvor doch erst zwei Sätze beweisen, welche dabei in Anwendung kommen; nämlich: 1) daß $\frac{\text{tang}\ x}{x} = 1$ ist, wenn x unendlich klein wird, und 2) daß $\cos^m \frac{x}{m} = 1$ ist, wenn m unendlich groß wird.

1) Es sei x = AM (Fig. 6) ein zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ liegender Bogen, MP sein Sinus und AT seine Tangente. Man verlängere MP, bis sie den Kreis in N schneidet und ziehe die Tangente TI; so ist:

Fig. 6.



AT + IT > Bogen AMI
> Bogen MAN, wegen AMI = MAN,

d. h. 2 AT > 2 AM, also AT > AM oder tang x > x.

Ferner ist Bogen MAN > Sehne AN, d. h. 2 Bogen AM > 2 MP, also AM > MP, d. h. x > sin x. Es ist demnach:

$$\text{tang}\ x > x > \sin x,$$

oder:

$$\frac{\sin x}{\cos x} > x > \sin x,$$

folglich:

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{x}{\sin x} > 1.$$

Nimmt nun x ohne Ende gegen o zu ab oder wird unendlich klein, so wird cos x = 1, und folglich $\frac{x}{\sin x} = 1$, also auch $\frac{\sin x}{x} = 1$, was durch $\left(\frac{\sin x}{x}\right)_{0'} = 1$ angedeutet werden soll.

Weiter ist:

$$\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x},$$

folglich:

$$\left(\frac{\tan x}{x}\right)_{0'} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)_{0'} \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)_{0'},$$

mithin:

$$\left(\frac{\tan x}{x}\right)_{0'} = 1 \,.\, 1 = 1.$$

2) Ferner ist:

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

also:

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2},$$

folglich:

$$\cos \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m^2},$$

und:

$$\cos^m \frac{x}{m} > \left(1 - \frac{x^2}{2m^2}\right)^m > 1 - \frac{x^2}{2m} + \ldots$$

Wird nun m hinreichend groß, so wird jedes Glied der Reihe im zweiten Theile der letzten Ungleichheit dem absoluten Werthe nach kleiner als das vorhergehende. Denn aus dem Gliede, vor welchem p Glieder vorhergehen, wird das folgende abgeleitet, wenn man es mit:

$$\frac{m-p}{p+1} \cdot \frac{x^2}{2m^2} = \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{p}{m}\right)\frac{x^2}{p+1}$$

multiplicirt, welche Größe mit zunehmendem m kleiner als jede gegebene Zahl werden kann. — Schreibt man also die obige Ungleichheit wie folgt:

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m} + \left[\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\frac{x^4}{4m^4} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{x^6}{8m^6}\right] + \ldots$$

so ergibt sich:

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m},$$

also:

$$1 > \cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m};$$

folglich für $m = \infty$:

$$\cos^m \frac{x}{m} = 1\text{, w. z. b. w.}$$

§. 65. Wir können jetzt zur Herleitung der Reihen für cos x und sin x aus den Gleichungen (2) übergehen. Setzen wir zu dem Zwecke $ma = x$, also $m = \frac{x}{a}$ und $a = \frac{x}{m}$, so können die Gleichheiten (2) folgendergestalt geschrieben werden:

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos x}{\cos^m \frac{x}{m}} = 1 - \dfrac{x(x-a)}{1.2}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^2 + \dots \\ \qquad \pm \dfrac{x(x-a)\dots(x-2na+a)}{1.2\dots.2n}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^{2n} \\ \qquad \mp \Theta.\dfrac{x(x-a)\dots(x-2na-a)}{1.2\dots(2n+2)}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^{2n+2}, \\ \dfrac{\sin x}{\cos^m \frac{x}{m}} = \dfrac{x}{1}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right) - \dfrac{x(x-a)(x-2a)}{1.2.3}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^3 + \dots \\ \qquad \pm \dfrac{x(x-a)\dots(x-2na)}{1.2\dots(2n+1)}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^{2n+1} \\ \qquad \mp \Theta' \dfrac{x(x-a)\dots(x-2na-2a)}{1.2\dots(2n+3)}\left(\dfrac{\tang a}{a}\right)^{2n+3}, \end{cases}$$

und die Bedingung (3) wird:

$$(5)\qquad \frac{(x-2na-2a)(x-2na-3a)}{(2n+3)(2n+4)}\left(\frac{\tang a}{a}\right)^2 < 1.$$

Läßt man nun m unbeschränkt zunehmen, so nimmt a unbeschränkt ab, weil $a = \frac{x}{m}$ ist, wo x eine endliche Größe bedeutet, und nach den weiter oben bewiesenen Sätzen ist alsdann:

$$\left(\frac{\tang a}{a}\right)_{0} = 1\text{, } \left(\cos^m \frac{x}{m}\right)_{m=\infty} = 1.$$

Folglich gehen die Gleichungen (4) in folgende über:

$$(6)\quad\begin{cases}\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \dfrac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} \\ \qquad\qquad \mp \Theta . \dfrac{x^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)}, \\ \sin x = x - \dfrac{x^3}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \dfrac{x^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+1)} \\ \qquad\qquad \mp \Theta' . \dfrac{x^{2n+3}}{1.2\ldots(2n+3)},\end{cases}$$

und die Bedingung (5) wird:

$$(7)\qquad \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} < 1.$$

Die Gleichungen (6), worin Θ, Θ' zwei zwischen o und 1 liegende Zahlen bedeuten, finden für alle Werthe von n statt, welche der Bedingung (7) genügen. Läßt man n unendlich groß werden, so werden die Ausdrücke:

$$(\varrho)\quad\begin{cases}\dfrac{x^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)} = \dfrac{x}{1}\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{3}\cdots\dfrac{x}{2n+2}, \\ \dfrac{x^{2n+3}}{1.2\ldots(2n+3)} = \dfrac{x}{1}\cdot\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{3}\cdots\dfrac{x}{2n+3}\end{cases}$$

offenbar unendlich klein, und man hat endlich für die gesuchten Reihen:

$$(8)\quad\begin{cases}\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \text{ in inf.} \\ \sin x = x - \dfrac{x^2}{1.2.3} + \dfrac{x^5}{1.2\ldots5} - \ldots \text{ in inf.}\end{cases}$$

welche für jeden Werth von x convergiren, weil die Reste (ϱ) immer verschwindend klein werden.

Wenn man in den Formeln (8), $x = m\dfrac{\pi}{2}$ setzt, wo m ein ächter Bruch und $\pi = 3{,}141592653589793238462643\ldots$ ist; so erhält man:

$$\sin\left(m \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1{,}5707963268 \cdot m - 0{,}6459640975 \cdot m^3 + 0{,}0796926262 \cdot m^5 - 0{,}0046817541 \cdot m^7 + 0{,}0001604412 \cdot m^9 - 0{,}0000035988 \cdot m^{11} + 0{,}0000000569 \cdot m^{13} - 0{,}0000000007 \cdot m^{15},$$

$$\cos\left(m \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 1 - 1{,}2337005501 \cdot m^2 + 0{,}2536695079 \cdot m^4 - 0{,}0208634808 \cdot m^6 + 0{,}0009192603 \cdot m^8 - 0{,}0000252020 \cdot m^{10} + 0{,}0000004711 \cdot m^{12} - 0{,}0000000064 \cdot m^{14} + 0{,}0000000001 \cdot m^{16}.$$

§. 65ª. Nachdem man sin x und cos x für irgend einen Werth von x vermittelst der Reihen (8) berechnet hat, lassen sich daraus auch leicht die entsprechenden Werthe von $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cotg x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tang x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ und $\cosec x = \frac{1}{\sin x}$ ableiten; aber man kann für diese vier letzten trigonometrischen Linien auch leicht ähnliche Reihenentwickelungen, wie für sin x und cos x erhalten, wonach sie sich direkt berechnen lassen.

1) So ist zunächst:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - (1 - \cos x)}$$
$$= 1 + (1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + (1 - \cos x)^3 + \ldots,$$

wenn $(1 - \cos x) < 1$, also cos x positiv ist, und mithin x zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ liegt. — Setzt man nun für cos x die erste der Reihen (8) und entwickelt die einzelnen Glieder nach Potenzen von x; so erhält man:

$$(9)\quad \begin{cases} \sec x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{5x^4}{1.2.3.4} + \frac{61x^6}{1.2.3\ldots6} + \ldots \\ \frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Es handelt sich nun um das Bildungsgesetz der Coefficienten 1, 1, 5, 61, . . ., und um dasselbe aufzufinden, wollen wir sie mit T_0, T_2, T_4, T_6, . . . bezeichnen. Bemerkt man alsdann, daß man die Relation:

$$\sec x \,.\, \cos x = 1$$

hat, und setzt in dieselbe für sec x und cos x die entsprechenden Reihen; so erhält man:

$$1 = \left(T_0 + \frac{T_2 x^2}{1.2} + \frac{T_4 x^4}{1.2.3.4} + \frac{T_6 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right)$$
$$\times \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right),$$

oder entwickelt:

$$\begin{aligned} 1 = T_0 & \\ & + \left(\frac{T_2}{1.2} - \frac{T_0}{1.2}\right) x^2 \\ & + \left(\frac{T_4}{1\ldots4} - \frac{T_2}{1.2} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{T_0}{1.2.3.4}\right) x^4 \\ & + \left(\frac{T_6}{1\ldots6} - \frac{T_4}{1\ldots4} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{T_2}{1.2} \cdot \frac{1}{1\ldots4} - \frac{T_0}{1\ldots6}\right) x^6 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun:

$T_0 = 1$, $T_2 - T_0 = 0$, also $T_2 = 1$,

$\frac{T_4}{1\ldots4} - \frac{T_2}{1.2} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{T_0}{1\ldots4} = 0$, also $T_4 = 5$,

und allgemein, wenn m eine gerade Zahl bedeutet:

$$\frac{T_m}{1\ldots m} - \frac{T_{m-2}}{1\ldots(m-2)} \cdot \frac{1}{1.2} + \frac{T_{m-4}}{1\ldots(m-4)} \cdot \frac{1}{1\ldots4} - \ldots = 0,$$

oder wenn man mit 1 . 2 . 3 . . . m multiplicirt:

$$T_m - \frac{m(m-1)}{1.2} T_{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} T_{m-4} - \ldots$$
$$= 0 = \sin\frac{m\pi}{2}, \qquad (\mu)$$

welche letzte Gleichung das allgemeine Bildungsgesetz der sogenannten Sekantencoefficienten ausdrückt, und woraus sich wegen

$T_0 = 1$ alle übrigen $T_2, T_4, T_6, \ldots$ ergeben, wenn man successive $m = 2, m = 4, m = 6, \ldots$ setzt.

2) Bemerkt man ferner, daß $\tang x = \sec x \,.\, \sin x$ ist, und setzt für $\sec x$ und $\sin x$ ihre resp. Reihenentwickelungen; so erhält man leicht:

$$\tang x = \left(1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{5\,x^4}{1.2.3.4} + \frac{61\,x^6}{1.2.3\ldots6} + \ldots\right)$$
$$\times\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \ldots\ldots\right)$$
$$\left.\begin{array}{l} = \frac{x}{1} + \frac{2\,x^3}{1.2.3} + \frac{16\,x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \\ \frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}, \end{array}\right\} \quad (10)$$

wo es wieder darauf ankommt, das allgemeine Bildungsgesetz der Coefficienten 1, 2, 16, ... zu finden.

Bezeichnet man diese sogenannten Tangentencoefficienten mit $T_1, T_3, T_5, \ldots$ und setzt in die Relation $\sin x = \tang x \,.\, \cos x$ die entsprechenden Reihenentwickelungen; so hat man:

$$\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2\ldots5} - \frac{x^7}{1.2\ldots7} + \ldots\right)$$
$$= \left(\frac{T_1\,x}{1} + \frac{T_3\,x^3}{1.2.3} + \frac{T_5\,x^5}{1.2\ldots5} + \ldots\right)$$
$$\times\left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2\ldots4} - \frac{x^6}{1.2\ldots6} + \ldots\right).$$

Entwickelt man wirklich und vergleicht auf beiden Seiten die Coefficienten von x^m, wo m eine ungerade Zahl bedeutet; so erhält man die Relation:

$$T_m - \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}\,T_{m-2} + \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,T_{m-4} + \ldots\ldots$$
$$= (-1)^{\frac{m-1}{2}} = \sin\frac{m\,\pi}{2}; \qquad (\mu')$$

welche das allgemeine Bildungsgesetz der Tangentencoefficienten T_1, $T_3, T_5, \ldots$ ausdrückt. Setzt man darin successive $m = 1, 3, 5, \ldots$, so erhält man die Werthe $T_1 = 1$, $T_3 = 2$, $T_5 = 16, \ldots$

Die Relationen (μ) und (μ') unterscheiden sich nur dadurch von einander, daß in der ersten m eine gerade und in der zweiten

eine ungerade Zahl bedeutet. Setzt man also in der einen oder in der andern dieser beiden Relationen successive $m = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$, so erhält man sowohl die Sekantencoefficienten T_1, T_2, $T_4, \ldots$, wie die Tangentencoefficienten T_1, T_3, $T_5, \ldots$

3) Weiter ist:

$$x \operatorname{cosec} x = \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$= 1 + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^2 + \left(1 - \frac{\sin x}{x}\right)^3 + \ldots,$$

vorausgesetzt, daß $1 - \frac{\sin x}{x} < 1$, also $\frac{\sin x}{x}$ ein positiver ächter Bruch ist, mithin x zwischen $+\pi$ und $-\pi$ liegt. — Setzt man nun für $\sin x$ die zweite der Reihen (8), entwickelt nach Potenzen von x und dividirt auf beiden Seiten durch x; so findet man:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{cosec} x = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{6}x}{1.2} + \frac{\frac{7}{15}x^3}{1.2.3.4} + \ldots \\ \pi > x > -\pi. \end{array}\right\} \quad (11)$$

Das allgemeine Bildungsgesetz der Coefficienten $\frac{1}{6}, \frac{7}{15}, \ldots$ ergäbe sich leicht, wenn man setzte:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{U_1 x}{1.2} + \frac{U_3 x^3}{1.2.3.4} + \ldots,$$

woraus folgt, indem man für $\sin x$ die entsprechende Reihe setzt:

$$1 = \left(\frac{1}{x} + \frac{U_1 x}{1.2} + \frac{U_3 x^3}{1.2.3.4} + \ldots\right)$$
$$\times \left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\right),$$

dann nach Potenzen von x entwickelte und endlich die Coefficienten von x^2, x^4, $x^6, \ldots$ einzeln $= 0$ setzte.

4) Ferner hat man:

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cosec} x \,.\, \cos x = \left(\frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{6}x}{1.2} + \frac{\frac{7}{15}x^3}{1.2.3.4} + \dots\right)$$
$$\times \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2\dots6} + \dots\right)$$
$$\left.\begin{array}{l} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{\frac{2}{3}x}{1.2} - \dfrac{\frac{8}{15}x^3}{1.2.3.4} - \dots\dots \\ \quad \pi > x > -\pi. \end{array}\right\} \quad (12)$$

Man kann also setzen:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{V_1\, x}{1.2} - \frac{V_3\, x^3}{1.2.3.4} - \dots\dots$$
$$\pi > x > -\pi,$$

und es handelt sich wieder darum, das allgemeine Bildungsgesetz der Coefficienten V_1, V_3, V_5 .... zu finden. Sowohl diese, wie die Coefficienten U_1, U_3, U_5 .... lassen sich aber leicht durch die Tangentencoefficienten T_1, T_3, T_5 ... ausdrücken. Denn wenn man in die bekannte Relation:

$$\operatorname{cotg} x - 2 \operatorname{cotg} 2x = \operatorname{tang} x$$

für die einzelnen Glieder die entsprechenden Reihenentwickelungen setzt, was unter der Bedingung $\pi > 2x > -\pi$ oder $\frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}$ erlaubt ist; so erhält man:

$$-\frac{V_1\, x}{1.2} - \frac{V_3\, x^3}{1.2.3.4} - \frac{V_5\, x^5}{1.2.3.4.5.6} - \dots$$
$$+ \frac{2^2 V_1\, x}{1.2} + \frac{2^4 V_3\, x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6 V_5\, x^5}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$
$$= \frac{T_1\, x}{1} + \frac{T_3\, x^3}{1.2.3} + \frac{T_5\, x^5}{1.2\dots.5} + \dots$$

Setzt man jetzt die beiderseitigen Coefficienten von x^{2n-1} einander gleich, so hat man:

$$-\frac{V_{2n-1}}{2n} + \frac{2^{2n} V_{2n-1}}{2n} = T_{2n-1},$$

woraus folgt:

$$V_{2n-1} = \frac{2n}{2^{2n} - 1} \cdot T_{2n-1}. \qquad (a)$$

Ebenso erhält man, wenn man in die Relation:

$$2 \operatorname{cosec} 2x - \operatorname{cotg} x = \operatorname{tang} x$$

für die einzelnen Glieder die entsprechenden Reihenentwickelungen setzt:

$$\frac{2^2 U_1 x}{1.2} + \frac{2^4 U_3 x^3}{1.2.3.4} + \frac{2^6 U_5 x^5}{1.2.3...6} + \ldots$$
$$+ \frac{V_1 x}{1.2} + \frac{V_3 x^3}{1.2.3.4} + \frac{V_5 x^5}{1.2.3...6} + \ldots$$
$$= \frac{T_1 x}{1} + \frac{T_3 x^3}{1.2.3} + \frac{T_5 x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

und durch Vergleichung der Coefficienten von x^{2n-1}:

$$\frac{2^{2n} U_{2n-1}}{2n} + \frac{V_{2n-1}}{2n} = T_{2n-1},$$

also, wenn man für V_{2n-1} seinen obigen Werth (α) setzt:

$$U_{2n-1} = \frac{2n}{2^{2n}} \cdot \frac{2^{2n}-2}{2^{2n}-1} \cdot T_{2n-1}. \qquad (\beta)$$

Die Formeln (α) und (β) geben also die Coefficienten V_1, V_3, V_5 ... und U_1, U_3, U_5 ... durch die Tangentencoefficienten ausgedrückt.

Reihenentwickelungen für die inversen Kreisfunktionen oder cyclometrischen Funktionen.

§. 66. Wenn $y = \sin x$, also $x = \operatorname{arc} \sin (y)$ ist, so hat man:

$$y = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2...5} - \frac{x^7}{1.2.3...7} + \ldots$$

Kehrt man diese Gleichheit um, so daß x durch eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe ausgedrückt wird; so erhält man sofort:

$$x = \operatorname{arc} \sin (y) = y + \frac{1}{2.3} y^3 + \frac{1.3}{2.4.5} y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} y^7 + \ldots$$
$$+ \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n(2n+1)} y^{2n+1} + \frac{1.2.3\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)(2n+3)} y^{2n+3} + \ldots$$

Diese Reihe convergirt, wenn $y^2 < 1$ oder $1 > y > -1$ ist; denn für die Grenze des Verhältnisses zweier successiver Glieder hat man:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} y^2 = \lim_{n=\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\left(1+\frac{2}{2n}\right)\left(1+\frac{3}{2n}\right)} y^2 = y^2 < 1;$$

und wenn man das Convergenzkriterium $\lim_{n=\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right]>1$ anwendet, so hat man:

$$\lim_{n=\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\right] = \lim_{n=\infty}\left[n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2}-1\right)\right]$$

$$= \lim_{n=\infty}\left(n \cdot \frac{6n+5}{(2n+1)^2}\right) = \lim_{n=\infty} \frac{\left(6+\frac{5}{n}\right)}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{6}{2^2} = \frac{3}{2} > 1;$$

folglich convergirt die Reihe auch für $y = 1$.

Wenn man in der obigen Reihe für y seinen Ausdruck $\sin x$ setzt, so hat man:

$$\left.\begin{aligned} x = \sin x + \frac{1}{2.3}\sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5}\sin^5 x + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\sin^5 x + \ldots \\ \frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} (13)$$

Wenn $y = \cos x$, also $x = \text{arc} \cos (y)$ ist, so hat man wegen:

$$\text{arc} \cos (y) = \frac{\pi}{2} - \text{arc} \sin (y)$$

offenbar:

$$\left.\begin{aligned} x = \text{arc} \cos (y) = \frac{\pi}{2} - y - \frac{1}{2.3} y^3 - \frac{1.3}{2.4.5} y^5 - \frac{1.3.5}{2.4.6.7} y^7 - \ldots \\ 1 \geqq y \geqq -1. \end{aligned}\right\} (14)$$

Setzt man in dieser Gleichheit für y seinen Ausdruck $\cos x$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} x = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{1}{2.3}\cos^3 x - \frac{1.3}{2.4.5}\cos^5 x - \ldots. \\ \frac{\pi}{2} \geqq x \geqq -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} (14)$$

Wenn man in der Gleichheit (13) setzt $x = \frac{\pi}{6}$, so ist $\sin x = \frac{1}{2}$; folglich:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1.3}{2.4.5}\cdot\frac{1}{2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}\cdot\frac{1}{2^7} + \ldots \quad (15)$$

Wenn man weiter die Gleichheit:

$$y = \text{tang}\, x = x + \frac{2x^3}{1.2.3} + \frac{16x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

umkehrt, so daß $x = \text{arc tang}\,(y)$ durch eine nach Potenzen von y fortschreitende Reihe ausgedrückt wird; so erhält man:

$$x = \text{arc tang}\,(y) = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots \pm \frac{y^{2n-1}}{2n-1} \mp \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \pm \ldots \quad (16)$$

Diese Reihe convergirt, wenn $y^2 < 1$ oder $1 > y > -1$ ist, weil:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n=\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+1}\, y^2\right) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}\, y^2\right) = y^2 < 1,$$

und auch für $x = \pm 1$, weil die Zeichen wechseln und die Glieder unbeschränkt abnehmen.

Wenn man in der obigen Gleichheit für y seinen Ausdruck $\text{tang}\, x$ setzt, so hat man:

$$\left. \begin{array}{l} x = \text{tang}\, x - \dfrac{\text{tang}^3 x}{3} + \dfrac{\text{tang}^5 x}{5} - \dfrac{\text{tang}^7 x}{7} + \ldots \\ \dfrac{\pi}{4} \geqq x \geqq -\dfrac{\pi}{4}. \end{array} \right\} \quad (16)$$

Die Gleichheit (16) gibt den Bogen durch seine Tangente ausgedrückt, wenn der absolute Werth der letztern < 1 ist, und es ist daher noch eine Formel zu finden, welche den Bogen gibt, wenn der absolute Werth seiner Tangente > 1 ist. — Zu dem Zwecke braucht man nur zu bemerken, daß:

$$\text{arc tang}\,(y) = \frac{\pi}{2} - \text{arc cotg}\,(y) = \frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\left(\frac{1}{y}\right)$$

ist, und wenn also $y > 1$ ist, so ist $\frac{1}{y} < 1$. Setzt man nun $\frac{1}{y}$ statt y in die Gleichheit (16) und berücksichtigt die letzte Relation; so erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} \text{arc tang}\,(y) = \dfrac{\pi}{2} - \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{3y^3} + \dfrac{1}{5y^5} - \dfrac{1}{7y^7} + \ldots\right) \\ y \geqq 1, \end{array} \right\} \quad (17)$$

oder wegen $\frac{1}{y} = \operatorname{cotg} x$:

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - \left(\operatorname{cotg} x - \frac{\operatorname{cotg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{cotg}^5 x}{5} - \frac{\operatorname{cotg}^7 x}{7} + \ldots\right) \\ \qquad\qquad x \geqq \frac{\pi}{4}. \end{array}\right\} \quad (17)$$

Ferner ist wegen:

$$\operatorname{arc\,cotg}(y) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{y}\right),$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arc\,cotg}(y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{3y^3} + \frac{1}{5y^5} - \frac{1}{7y^7} + \ldots \\ \qquad\qquad y \geqq 1, \end{array}\right\} \quad (18)$$

und wegen:

$$\operatorname{arc\,cotg}(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}(y)$$

ist:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arc\,cotg}(y) = \frac{\pi}{2} - \left(y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots\right) \\ \qquad\qquad 1 \geqq y \geqq -1. \end{array}\right\} \quad (19)$$

Wegen $\operatorname{arc\,sec}(y) = \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{y}\right)$ hat man weiter:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arc\,sec}(y) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{y} - \frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{y^3} - \frac{1.3}{2.4.5} \cdot \frac{1}{y^5} - \ldots \\ \qquad\qquad y \geqq 1, \end{array}\right\} \quad (20)$$

und wegen $\operatorname{arc\,cosec}(y) = \operatorname{arc\,sin}\left(\frac{1}{y}\right)$ hat man:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{arc\,cosec}(y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{y^3} + \frac{1.3}{2.4.5} \cdot \frac{1}{y^5} + \ldots \\ \qquad\qquad y \geqq 1. \end{array}\right\} \quad (21)$$

Wenn man in der Gleichheit (16) $x = \frac{\pi}{4}$, also $y = \operatorname{tang} x = 1$ setzt, so gibt sie:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots; \qquad (22)$$

allein diese Formel ist wegen der sehr langsamen Convergenz der Reihe zur wirklichen Berechnung von $\frac{\pi}{4}$ nicht wohl geeignet.

Setzt man in derselben Gleichheit $x = \frac{\pi}{6}$, also $y = \text{tang}\, x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; so erhält man:

$$\pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \ldots\right), \qquad (23)$$

welche Reihe schon viel rascher convergirt.

Man kann übrigens auch aus der Reihe (22) leicht eine viel schneller convergirende ableiten; denn man hat:

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) + \ldots$$

$$= \frac{2}{1.3} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{9.11} + \ldots, \text{ und:}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) - \ldots$$

$$= 1 - \frac{2}{3.5} - \frac{2}{7.9} - \ldots$$

Addirt man diese beiden Resultate und dividirt mit 2, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{4}{1.3.5} + \frac{4}{5.7.9} + \frac{4}{9.11.13} + \ldots \\ &\text{oder:} \\ &\frac{\pi}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{5.7.9} + \frac{1}{9.11.13} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Die beiden folgenden Methoden, convergente Reihen für π zu erhalten, verdienen hier noch näher erörtert zu werden.

1. Es ist bekanntlich (§. 56ª.):

$$\text{arc tang}\,(y) + \text{arc tang}\,(z) = \text{arc tang}\left(\frac{y+z}{1-yz}\right), \; yz < 1;$$

folglich für $y < 1$ und $z < 1$ nach (16):

$$\left.\begin{aligned} \text{arc tang}\left(\frac{y+z}{1-yz}\right) &= y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \ldots \\ &+ z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Setzt man nun:

$$\frac{y+z}{1-yz} = 1, \text{ so ist } \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{y+z}{1-yz}\right) = \frac{\pi}{4}$$

und:

$$z = \frac{1-y}{1+y} < 1.$$

Nimmt man z. B. $y = \frac{1}{2}$, so ist $z = \frac{1}{3}$, und mithin ist nach (25):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \dots \\ + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \dots\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

2. Es sei x ein Bogen, dessen Tangente $= \frac{1}{5}$ und v ein anderer, dessen Tangente $= \frac{1}{239}$ ist; so ist:

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{5},\ \operatorname{tang} 2x = \frac{2 \operatorname{tang} x}{1 - \operatorname{tang}^2 x} = \frac{5}{12},\ \operatorname{tang} 4x = \frac{2 \operatorname{tang} 2x}{1 - \operatorname{tang}^2 2x}$$

$$= \frac{120}{119},\ \operatorname{tang}(4x - v) = \frac{\operatorname{tang} 4x - \operatorname{tang} v}{1 + \operatorname{tang} 4x \operatorname{tang} v} = 1,\ 4x - v = \frac{\pi}{4};$$

folglich nach (16):

$$x = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \dots$$

$$v = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \dots$$

und endlich:

$$\left.\begin{aligned}4x - v = \frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \dots\right) \\ - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \dots\right)\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Man findet leicht:

$$\pi = 3{,}1415926535 \dots$$

Reihenentwickelungen für log sin x und log cos x.

§. 67. Da die Reihen (8) offenbar convergent bleiben, wenn man $x = a + bi = r(\cos\omega + i \sin\omega)$ setzt, so folgt von selbst: daß man für x in den Gleichungen (8) auch imaginäre Aus-

drücke setzen darf — und daß dennoch die daraus gezogenen Schlüsse auch in diesem Falle noch richtig bleiben, obgleich der bisherige Begriff von sin x und cos x alsdann nicht mehr paßt, sondern nothwendig erweitert werden muß. Zu dem Zwecke definirt man sin x und cos x geradezu als die Summen oder Grenzen der Reihen (8), und wir werden bald zeigen: daß sich aus diesen Begriffsbestimmungen alle frühere Eigenschaften von sin x, cos x, ꝛc. leicht herleiten lassen.

Um die Reihen für log sin x und log cos x abzuleiten, müssen wir zunächst zeigen: daß die Gleichung:

$$\sin x = 0$$

oder:

$$0 = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \text{ in inf.}$$

keine imaginäre Wurzel hat.

Hätte diese Gleichung eine imaginäre Wurzel $x = a + b i$, so wäre:

$$\sin (a + b i) = 0,$$

oder: $$\sin a \cos b i + \cos a \sin b i = 0. \qquad (\alpha)$$

Nun ist aber:

$$\sin b i = i \left(b + \frac{b^3}{1.2.3} + \frac{b^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \text{ in inf.}\right),$$

$$\cos b i = 1 + \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} + \ldots \text{ in inf.}$$

und die Gleichung (α) zerfällt in die beiden folgenden:

$$\sin a \left(1 + \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} + \ldots \text{ in inf.}\right) = 0,$$

$$\cos a \left(b + \frac{b^3}{1.2.3} + \frac{b^5}{1.2.3.4.5} + \ldots \text{ in inf.}\right) = 0.$$

Nach der ersten muß nothwendig $\sin a = 0$, weil die in der Klammer stehende Reihe für keinen reellen Werth von b verschwinden kann — und die zweite Gleichung kann alsdann nur für $b = 0$ erfüllt werden — womit also der Satz bewiesen ist.

Hieraus folgt weiter: daß auch die Gleichung:

$$\cos x = 0$$

keine imaginäre Wurzel hat; denn cos x ist nichts anders als $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

Betrachten wir jetzt die beiden Gleichungen:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} = 0,$$

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} = 0,$$

und bezeichnen die von o verschiedenen 2n Wurzeln der ersten mit $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2n}$, so wie die 2n Wurzeln der zweiten mit $b_1, b_2, b_3, \ldots b_{2n}$; so ist identisch:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}$$
$$= x\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x}{a_{2n}}\right),$$

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}$$
$$= \left(1 - \frac{x}{b_1}\right)\left(1 - \frac{x}{b_2}\right)\ldots\left(1 - \frac{x}{b_{2n}}\right).$$

Da diese identischen Gleichungen für **jeden** Werth von n stattfinden, so finden sie auch für $n = \infty$ statt, wodurch sich die ersten Theile derselben resp. auf sin x und cos x reduciren. — Die Wurzeln der Gleichung:

$$\sin a = 0$$

sind aber:

$$\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots.$$

und die der Gleichung:

$$\cos x = 0$$

sind:

$$\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

Man hat folglich:

$$\left.\begin{array}{l} \sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots \\ \text{oder:} \\ \sin x = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\ldots \end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots \\ \text{oder:} \\ \cos x = \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{5\pi}\right)\ldots \end{array}\right\} (2)$$

Setzt man $x = \frac{m}{2n}\pi$, so folgt aus (1) und (2):

$$\sin\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\ldots \quad (3)$$

$$\cos\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{n}\right)\left(\frac{3n+m}{n}\right)\ldots. \quad (4)$$

Bemerkt man ferner, daß $\sin\frac{m\pi}{2n} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{m\pi}{2n}\right)$ $= \cos\left(\frac{n-m}{2n}\pi\right)$ und $\cos\frac{m\pi}{2n} = \sin\left(\frac{n-m}{2n}\pi\right)$ ist, so folgt aus (3) und (4), wenn man n—m statt m setzt:

$$\sin\left(\frac{n-m}{2n}\pi\right) = \cos\frac{m}{2n}\pi = \pi\left(\frac{n-m}{2n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)$$
$$\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6n}\right)\ldots. \quad (5)$$

$$\cos\left(\frac{n-m}{2n}\pi\right) = \sin\frac{m}{2n}\pi = \frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)$$
$$\left(\frac{6n-m}{5n}\right)\left(\frac{6n+m}{7n}\right)\ldots. \quad (6)$$

Wenn man nun (3) durch (5) dividirt, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{c}\tan\frac{m\pi}{2n} = \\ \left(\frac{m}{n-m}\right)\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\ldots\end{array}\right\} \quad (7)$$

und:

$$\cot\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{m}\right)\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right)\ldots \quad (8)$$

$$\sec\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\left(\frac{3n}{3n+m}\right)\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\left(\frac{5n}{5n+m}\right)\ldots \quad (10)$$

$$\operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m}\left(\frac{n}{2n-m}\right)\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\left(\frac{3n}{4n-m}\right)\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\left(\frac{5n}{6n-m}\right)\ldots \quad (11)$$

Ebenso ergibt sich aus (5) und (6):

$$\tan\frac{m}{2n}\pi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{m}{n-m}\cdot\frac{2}{1}\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\ldots \quad (12)$$

$$\cot\frac{m}{2n}\pi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{m}\frac{1}{2}\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\cdot\frac{3}{4}\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\ldots \quad (13)$$

$$\sec\frac{m}{2n}\pi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{n-m}\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{4n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\ldots \quad (14)$$

$$\operatorname{cosec}\frac{m}{2n}\pi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdots \quad (15)$$

Nimmt man jetzt von beiden Theilen der Gleichungen (1) und (2) die Logarithmen in dem Systeme, dessen Modulus $= M$ ist, so hat man:

$$\log\sin x = \log x + \log\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right) + \log\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right) + \cdots,$$

$$\log\cos x = \log\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right) + \log\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right) + \cdots,$$

oder wenn man $x = \frac{m\pi}{2n}$ setzt:

$$\log\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{\pi}{2} + \log m - \log n + \log\left(1-\frac{m^2}{4n^2}\right)$$
$$+ \log\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{36n^2}\right) + \cdots$$

$$\log\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\frac{m^2}{n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{9n^2}\right) + \log\left(1-\frac{m^2}{16n^2}\right) + \cdots$$

Entwickelt man endlich die einzelnen Glieder in den zweiten Theilen nach der bekannten Formel:

$$\log(1-z) = -M\left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots\right),$$

welche bekanntlich convergirt, so lange $z < 1$ ist; so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\log\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{\pi}{2} &+ \log m - \log n \\ &- \frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{M}{1}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\cdots\right) \\ &- \frac{m^4}{n^4}\cdot\frac{M}{2}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\cdots\right) \\ &- \frac{m^6}{n^6}\cdot\frac{M}{3}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\cdots\right) \\ &- \quad \text{ic.} \qquad\qquad \text{ic.}\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned}\log\cos\frac{m\pi}{2n} = &- \frac{m^2}{n^2}\cdot\frac{M}{1}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right) \\ &- \frac{m^4}{n^4}\cdot\frac{M}{2}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right) \\ &- \frac{m^6}{n^6}\cdot\frac{M}{3}\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\cdots\right) \\ &- \quad \text{ic.} \qquad\qquad \text{ic.}\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

§. 68. Nachdem $\log\sin\frac{m\pi}{2n}$ und $\log\cos\frac{m\pi}{2n}$ berechnet sind, hat man auch:

$$\log\tang\frac{m\pi}{2n}=\log\sin\frac{m\pi}{2n}-\log\cos\frac{m\pi}{2n},$$

$$\log\cotg\frac{m\pi}{2n}=\log\cos\frac{m\pi}{2n}-\log\sin\frac{m\pi}{2n},$$

$$=-\log\tang\frac{m\pi}{2n},$$

$$\log\sec\frac{m\pi}{2n}=-\log\cos\frac{m\pi}{2n},\ \log\operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n}=-\log\sin\frac{m\pi}{2n}.$$

§. 69. Wenn man in der Gleichung (1):

$$\sin x=x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\ldots$$

$x=\frac{\pi}{2}$ setzt; so ergibt sich:

$$1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\ldots,$$

folglich:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots,$$

welches die bekannte Formel von Wallis ist. — Setzt man $x=\frac{\pi}{4}$, so erhält man:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdots$$

§. 70. Wir wollen nun zeigen: daß die früher entwickelten Eigenschaften von sin x, cos x, tang x, ꝛc. noch stattfinden, wenn der erweiterte Begriff derselben (§. 67.) zu Grunde gelegt wird, indem wir zunächst bemerken: daß tang x, cot x, sec x und cosec x wieder durch die Gleichheiten definirt werden:

$$\tang x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\ \sec x=\frac{1}{\cos x}\text{ und }\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}.$$

Auch soll das x der Kürze und Gleichförmigkeit wegen noch der Bogen x genannt werden, obgleich dabei ebenso wenig an einen Kreisbogen gedacht wird, wie bei der zweiten Potenz x^2 einer Zahl x an das geometrische Quadrat, dessen Seite durch die abstrakte Zahl x gemessen wird.

Bekanntlich findet die Gleichheit:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \text{ in inf.}$$

für jeden reellen und imaginären Werth von x statt; setzt man also statt x successive xi und — xi, so ergibt sich daraus:

$$e^{xi} = 1 + \frac{x}{1}i - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}i + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5}i - \ldots \text{ in inf.}$$

$= \cos x + i \sin x$, wegen §. 66. Gleich. (8)

$$e^{-xi} = 1 - \frac{x}{1}i - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}i + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^5}{1.2.3.4.5}i - \ldots \text{ in inf.}$$

$= \cos x - i \sin x$;

folglich ist:

$$(1) \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}. \quad (2)$$

Hieraus lassen sich zunächst die Gleichheiten:

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 x + \cos^2 x = 1, \\ \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{array} \right.$$

leicht ableiten. Denn es ist:

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)^2 = -\frac{e^{2xi} - 2 + e^{-2xi}}{4}$$

$$\cos^2 x = \left(\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2xi} + 2 + e^{-xi}}{4},$$

also:

$$(4) \quad \sin^2 x + \cos^2 x = 1;$$

ferner:

$$\sin x \cos y = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \cdot \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}$$

$$= \frac{e^{(x+y)i} - e^{-(x-y)i} + e^{(x-y)i} - e^{-(x+y)i}}{4i},$$

$$\cos x \sin y = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \cdot \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$$

$$= \frac{e^{(x+y)i} + e^{-(x-y)i} - e^{(x-y)i} - e^{-(x+y)i}}{4i},$$

folglich:

(5) $\sin x \cos y + \cos x \sin y = \frac{e^{(x+y)i} - e^{-(x+y)i}}{2i} = \sin(x+y)$,

(6) $\sin x \cos y - \cos x \sin y = \frac{e^{(x-y)i} - e^{-(x-y)i}}{2i} = \sin(x-y)$.

Weiter ist:

$$\cos x \cos y = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} \cdot \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}$$
$$= \frac{e^{(x+y)i} + e^{-(x-y)i} + e^{(x-y)i} + e^{-(x+y)i}}{4},$$

$$\sin x \sin y = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \cdot \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$$
$$= \frac{e^{(x+y)i} - e^{-(x-y)i} - e^{(x-y)i} + e^{-(x+y)i}}{-4};$$

folglich:

(7) $\cos x \cos y - \sin x \sin y = \frac{e^{(x+y)i} + e^{-(x+y)i}}{2} = \cos(x+y)$,

(8) $\cos x \cos y + \sin x \sin y = \frac{e^{(x-y)i} + e^{-(x-y)i}}{2} = \cos(x-y)$.

§. 71. Aus (1) und (2) folgt ferner:

$\sin o = o$, $\cos o = 1$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, was auch unmittelbar aus den Reihen (8) für $\sin x$ und $\cos x$ in §. 66. selbst folgt.

Nach denselben Reihen ist, wenn ε eine unendlich kleine Größe bedeutet:

$$\sin \varepsilon = \varepsilon, \ \cos \varepsilon = 1,$$

folglich:

$$\sin(x+\varepsilon) = \sin x \cos \varepsilon + \cos x \sin \varepsilon$$
$$= \sin x + \cos x \, . \, \varepsilon,$$
$$\sin(x+\varepsilon) - \sin x = \cos x \, . \, \varepsilon.$$

Ebenso ergibt sich:

$$\cos(x+\varepsilon) - \cos x = -\sin x \, . \, \varepsilon,$$

und hieraus sieht man: daß sich $\sin x$ und $\cos x$ stetig, d. h. nach unendlich kleinen Incrementen ändern, wenn sich x stetig ändert.

Der Reihe für $\cos x$ kann man folgende beiden Formen geben:

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{1.2}\right) + \frac{x^4}{1.2.3.4}\left(1 - \frac{x^2}{5.6}\right) + \frac{x^8}{1.2...8}\left(1 - \frac{x^2}{9.10}\right) + ...,$$

$$= 1 - \frac{x^2}{1.2}\left(1 - \frac{x^2}{3.4}\right) - \frac{x^6}{1.2...6}\left(1 - \frac{x^2}{7.8}\right) - \frac{x^{10}}{1.2...10}\left(1 - \frac{x^2}{11.12}\right) - ..$$

Aus der ersten erhellet: daß cos x für alle zwischen o und $\sqrt{2}$ liegende Werthe von x positiv ist, und aus der zweiten erhellet: daß cos x für x = 2 negativ ist. Da nun cos x nach dem eben Gesagten eine stetige Funktion von x ist, so muß sie in dem Intervalle von $x = \sqrt{2}$ bis x = 2 nothwendig wenigstens einmal = o werden, d. h. es gibt zwischen $\sqrt{2}$ und 2 wenigstens einen Werth von x, für welchen cos x = o wird.

Das Doppelte dieses Werthes, welches also eine zwischen $\sqrt{8}$ und 4 liegende Zahl ist, wollen wir mit π bezeichnen.

Es ist also $\cos\frac{\pi}{2} = o$ und cos x von x = o bis $x = \frac{\pi}{2}$ stets positiv; und da $\sin(x + \varepsilon) - \sin x = \cos x \,.\, \varepsilon$ ist, so folgt: daß sin x von x = o bis $x = \frac{\pi}{2}$ stets zunimmt, indem sin o = o und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ ist, weil $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ist. — Und da $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ ist, so folgt: daß cos x von cos o = 1 bis $\cos\frac{\pi}{2} = o$ abnimmt.

Aus $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
und: $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
folgt für $x = \frac{\pi}{2}$, also $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = o$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = \cos y, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = -\sin y.$$

Nimmt nun y von o bis $\frac{\pi}{2}$ zu, so nimmt cos y von 1 bis o ab, also auch $\sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)$, d. h. sin x nimmt von $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ bis $\sin\pi = o$ ab, wenn x von $\frac{\pi}{2}$ bis π wächst. — Ebenso erhellet: daß cos x von $\cos\frac{\pi}{2} = o$ bis $\cos\pi = -1$ fortwährend abnimmt, wenn x von $\frac{\pi}{2}$ bis π zunimmt.

Auf diese Weise kann man den stetigen Verlauf von sin x und cos x weiter verfolgen, wenn x sich von π bis $\frac{3\pi}{2}$, von $\frac{3\pi}{2}$

bis 2π, u. s. w. stetig ändert, und man erhält ganz dieselben Resultate wieder, wie früher, wo x einen veränderlichen Kreisbogen bezeichnete.

§. 72. Die Gleichungen (3) ergeben sich noch einfacher auf folgende Weise. Es ist:

$$e^{xi} \cdot e^{-xi} = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x),$$

d. h.:
$$e^{o} = 1 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Weiter ist:

$$e^{xi} \cdot e^{yi} = (\cos x + i \sin x)(\cos y - i \sin y)$$

d. h.: $e^{(x+y)i} = \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos x + \cos x \sin y)$;

aber auch:

$$e^{(x+y)i} = \cos(x+y) + i \sin(x+y);$$

folglich:

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

und wenn man in den beiden letzten Gleichungen $-y$ statt y setzt:

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y,$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y.$$

Aus:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

folgt ferner:

$$e^{mxi} = \cos mx + i \sin mx = (\cos x + i \sin x)^m.$$

Da:

$$e^{xi} \cdot e^{yi} \cdot e^{zi} \ldots\ldots = e^{(x+y+z+\ldots\ldots)i}$$

ist, so ist auch:

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)(\cos z + i \sin z)\ldots\ldots$$
$$= \cos(x+y+z\ldots) + i \sin(x+y+z+\ldots).$$

Aus:

$$\sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

folgt:

$$(9) \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2xi} - 1}{e^{2xi} + 1},$$

und:

$$(10) \qquad \cot x = i \cdot \frac{e^{2xi} + 1}{e^{2xi} - 1}.$$

Vermittelst des Vorhergehenden ließen sich nun auch leicht die Ausdrücke von $\sin(x + zi), \ldots \arcsin(y + vi), \ldots$ finden, so wie überhaupt noch eine ziemliche Anzahl mehr oder weniger

interessanter und nützlicher Beziehungen zwischen den trigonometrischen und cyclometrischen Funktionen ableiten; allein die weitere Verfolgung dieses Gegenstandes gehört mehr in die algebraische und höhere Analysis.

Logarithmisch brauchbare trigonometrische Formeln.

§. 73. Da sich die Zahlenrechnungen mittelst Logarithmen in der Regel am leichtesten und einfachsten verrichten lassen, so hat man es mehr mit log sin x, log cos x, log tang x,... zu thun, als mit sin x, cos x, tang x, ... selbst, und mit Hülfe der Formeln (4) in §. 67. kann man diese Logarithmen mit jedem beliebigen Grade von Annäherung berechnen, was in der That schon mehrfach geschehen ist, wie die verschiedenen, bereits vorhandenen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln, von denen wir blos die von Vega und Callet nennen wollen, zeigen, deren Einrichtung und Gebrauch man aus ihren Einleitungen selbst ersehen kann.

Soll man aber einen Ausdruck mittelst Logarithmen bequem berechnen können, so darf derselbe nur eingliedrige Faktoren enthalten, und man sagt alsdann: er sei logarithmisch-brauchbar. Wenn ein Ausdruck keine andern mehrgliedrigen Faktoren, als Summen, oder Differenzen zweier Sinus, Cosinus, oder Tangenten gegebener Bogen enthält; so kann man denselben logarithmisch brauchbar machen, wenn man sich der Formeln in §. 42 folgg. bedient, weshalb diese Formeln auch so wichtig sind. — Es gibt jedoch eine allgemeine Methode, jeden Ausdruck logarithmisch brauchbar zu machen, der es nicht schon ist, mit deren Erörterung wir uns jetzt näher befassen wollen.

Zunächst wollen wir einen binomischen Ausdruck:

$$x = a + b$$

betrachten, und annehmen, daß man log x haben wolle, wenn blos log a und log b gegeben sind. Man kann setzen:

$$x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right),$$

und wenn man nun einen Hülfsbogen φ von solcher Beschaffenheit berechnet, daß:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a},$$

also:

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log b - \log a$$

oder:

$$\log \tang \varphi = \log b + \text{dec. Erg.} \log a - 10$$

ist; so hat man:

$$x = a\,(1 + \tang \varphi) = a\,.\,\frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos\varphi}.$$

Nun ist aber:

$$\sin\varphi + \cos\varphi = \cos(90^0 - \varphi) + \cos\varphi$$
$$= 2 \cos 45^0 \cos(45^0 - \varphi)$$
$$= \sqrt{2} \cos(45^0 - \varphi);$$

folglich:

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos(45^0 - \varphi)}{\cos\varphi},$$

und:

$$\log x = \log a + \tfrac{1}{2} \log 2 + \log \cos(45^0 - \varphi)$$
$$+ \text{dec. Erg.} \log \cos\varphi - 10.$$

Auf ähnliche Weise verfährt man mit dem Ausdrucke:

$$x = a - b,$$

indem man setzt:

$$\tang \varphi = \frac{b}{a},$$

also:

$$\log \tang \varphi = \log b + \text{dec. Erg.} \log a - 10,$$

und alsdann wird:

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos(45^0 + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Die obige Methode ist offenbar auf ein beliebiges Polynom:

$$a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots$$

anwendbar, weil man durch Anwendung eines ersten, zweiten, dritten, ... Hülfsbogens die Anzahl der Glieder des Polynomes successive um eins, zwei, drei, ... vermindern kann.

Uebrigens ist das vorhergehende Verfahren nicht das einzige, welches man anwenden kann; denn setzt man z. B.:

$$\tang^2 \varphi = \frac{b}{a},$$

so hat man:

$$a + b = a\,(1 + \tang^2 \varphi) = \frac{a}{\cos^2\varphi},$$

und wenn $a > b$ ist, und $b = a \sin^2 \varphi$ gesetzt wird:

$$a - b = a\,(1 - \sin^2\varphi) = a \cos^2\varphi,$$

u. s. f.

Soll man ferner die als reell vorausgesetzten Wurzeln x′, x″ der Gleichung:

$$x^2 - p\,x + q = o,$$

berechnen, wo p, q positive Zahlen bedeuten, deren Logarithmen gegeben sind; so hat man:

$$x' = \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},\ x'' = \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Da nach der Voraussetzung $q < \frac{p^2}{4}$ ist, so setze man:

$$q = \frac{p^2}{4} \sin^2 \varphi,$$

alsdann ist:

$$\log \sin \varphi = \log 2 + \tfrac{1}{2} \log q + \text{dec. Erg.} \log p - 10$$

und:

$$x' = \frac{p}{2}(1 + \cos \varphi) = p \cos^2 \tfrac{1}{2} \varphi,$$

$$x'' = \frac{p}{2}(1 - \cos \varphi) = p \sin^2 \tfrac{1}{2} \varphi.$$

Uebrigens hat Gauß eine besondere Tafel berechnet, vermittelst welcher man leicht den Logarithmus der Summe, oder Differenz zweier Zahlen, deren Logarithmen nur gegeben sind, finden kann, d. h. log (a ± b), wenn nur log a, log b und nicht a, b selbst gegeben sind. Diese Gauß'sche Tafel befindet sich auch in den neuern Ausgaben von Vega's „logarithmisch-trigonometrischem Handbuche", wo ihre Einrichtung und Anwendung näher erörtert und auch gezeigt wird, wie man vermittelst dieser Tafel leicht quadratische Gleichungen auflösen kann, wenn nicht die Coefficienten der Gleichung selbst, sondern ihre Logarithmen gegeben sind, und nicht die Wurzeln selbst, sondern nur ihre Logarithmen gesucht werden.

---

§. 74. Wir wollen nun noch einige interessante Sätze über trigonometrische Funktionen nachtragen.

1) Wenn $a + b + c = \pi$ ist, so findet die Gleichung statt:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1.$$

Denn wegen: $a + b = \pi - c$

ist: $\cos (a + b) = - \cos c$

oder: $\cos a \cos b + \cos c = \sin a \sin b,$

und wenn man zum Quadrate erhebt:

$$\cos^2 a \cos^2 b + 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 c = \sin^2 a \sin^2 b$$
$$= (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b),$$

oder reducirt:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a . \cos b . \cos c = 1,$$ w. z. b. w.

2) Wir wollen nun umgekehrt untersuchen, welche Relation zwischen a, b, c stattfinden muß, wenn die letzte Gleichung stattfindet.

Man kann diese Gleichung auf folgende Form bringen:

$$(\cos a + \cos b \cos c)^2 - \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

oder:

$$(\cos a + \cos b \cos c)^2 = 1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c$$
$$= (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c)$$
$$= \sin^2 b . \sin^2 c,$$

oder:

$$(\cos a + \cos b \cos c)^2 - \sin^2 b . \sin^2 c = 0,$$

also:

$$(\cos a + \cos b \cos c - \sin b \sin c)(\cos a + \cos b \cos c + \sin b \sin c) = 0$$

oder:

$$[\cos a + \cos (b + c)] . [\cos a + \cos (b - c)] = 0,$$

und endlich nach §. 42.:

$$4 \cos \frac{a + b + c}{2} \cos \frac{-a + b + c}{2} \cos \frac{a - b + c}{2} \cos \frac{a + b - c}{2} = 0.$$

Diese letzte Gleichung ist weiter nichts, als die gegebene unter einer andern Form, und zu ihrem Stattfinden ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß einer der Cosinusfaktoren = o sei; folglich einer ihrer Bogen $= (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet, die positiv, null, oder negativ sein kann. Die Bogen a, b, c müssen also einer der 4 Relationen genügen:

$$a + b + c = (2k + 1)\pi,$$
$$-a + b + c = (2k + 1)\pi,$$
$$a - b + c = (2k + 1)\pi,$$
$$a + b - c = (2k + 1)\pi.$$

3) Ferner wollen wir alle Bogen x suchen, welche der Gleichung:

$$a \sin x + b \cos x = c$$

genügen, wo a, b, c gegebene positive, oder negative Zahlen bedeuten.

Sucht man einen zwischen -90° und $+90^\circ$ liegenden Hülfsbogen φ von solcher Beschaffenheit, daß man hat:

$$\tang \varphi = \frac{b}{a},$$

so wird die gegebene Gleichung:

$$a\,(\sin x + \operatorname{tang}\varphi \cos x) = c,$$

oder:

$$\sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi = \frac{c\cos\varphi}{a},$$

oder:

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c\cos\varphi}{a}.$$

Die Aufgabe ist also nur möglich, wenn $\frac{c\cos\varphi}{a}$ zwischen -1 und $+1$ liegt. Ist dieses der Fall, so berechnet man mit Hülfe der Tafeln einen Bogen x_0, welcher der letzten Gleichung genügt, und alsdann werden alle übrigen Werthe von x durch:

$$x + \varphi = 2\,k\,.\,180^\circ + (x_0 + \varphi),$$
$$x + \varphi = (2\,k+1)\,.\,180^\circ - (x_0 + \varphi),$$

oder:

$$x = 2\,k\,.\,180^\circ + x_0,$$
$$x = (2\,k+1)\,.\,180^\circ - 2\,\varphi - x_0$$

gegeben.

Oder man setzt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, wo φ mittelst der Tafeln gefunden wird, und alsdann wird die gegebene Gleichung:

$$\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

so daß man $x - \varphi$, also auch x mit Hülfe der Tafeln finden kann.

Wenn $c = \sqrt{a^2+b^2}$ ist, so ist $x = \varphi$; wenn $c > \sqrt{a^2+b^2}$ ist, so ist x imaginär, und wenn c negativ ist, so setzt man $x = -y$, wodurch sich die gegebene Gleichung in folgende verwandelt:

$$a \sin y - b \cos y = c,$$

welche auf dieselbe Weise auf $\cos(y+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$ gebracht wird.

4) Das Verhältniß $\frac{\sin x}{x}$ ist die Grenze, gegen welche das Produkt:

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n}$$

convergirt, wenn n unendlich groß wird.

Denn man hat:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

$$\sin \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4},$$

$$\sin \frac{x}{4} = 2 \sin \frac{x}{8} \cos \frac{x}{8},$$

. . . .

. . . .

$$\sin \frac{x}{2^{n-1}} = 2 \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}.$$

Multiplicirt man diese Gleichheiten in einander, und läßt die gemeinschaftlichen Faktoren beiderseits hinweg, so kommt:

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots . \cos \frac{x}{2^n},$$

also:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots \cos \frac{x}{2^n}.$$

Wird nun n unendlich groß, so wird offenbar:

$$\sin \frac{\frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} = 1,$$

und folglich:

$$\frac{\sin x}{x} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots \cos \frac{x}{2^n} \text{ für } n = \infty.$$

Die Grenze des Produktes:

$$\cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots . \text{ in inf.}$$

ist dagegen $= \frac{\sin 2x}{2x}$. Denn setzt man:

$$\cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots . \cos \frac{x}{2^n} = P,$$

$$\sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{4} \sin \frac{x}{8} \ldots \sin \frac{x}{2^n} = Q,$$

so hat man:

$$P \cdot Q = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot Q;$$

folglich:

$$P = \frac{\sin 2x}{2^{n+1} \sin \frac{x}{2^n}}.$$

Wird nun $n = \infty$, so wird $\sin \frac{x}{2^n} = \frac{x}{2^n}$, und mithin:

$$P = \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots \text{ in inf.} = \frac{\sin 2x}{2x}.$$

5) Endlich wollen wir noch die Summe der Cosinus der eine arithmetische Progression bildenden Bogen:

$$a,\ a + h,\ a + 2h, \ldots a + (n - 1) h$$

suchen.

Es sei i irgend eine ganze Zahl, so ist nach §. 42.:

$$2 \sin \frac{h}{2} \cos (a + ih) = \sin \left(a + \frac{2i + 1}{2} h\right) - \sin \left(a + \frac{2i - 1}{2} h\right),$$

und wenn man der Zahl i successive die Werthe 0, 1, 2, 3, ... n — 1 beilegt; so erhält man:

$$2 \sin \frac{h}{2} \cos a = \sin \left(a + \frac{h}{2}\right) - \sin \left(a - \frac{h}{2}\right),$$

$$2 \sin \frac{h}{2} \cos (a + h) = \sin \left(a + \frac{3h}{2}\right) - \sin \left(a + \frac{h}{2}\right),$$

$$2 \sin \frac{h}{2} \cos (a + 2h) = \sin \left(a + \frac{5h}{2}\right) - \sin \left(a + \frac{3h}{2}\right),$$

. . . .

. . . .

$$2 \sin \frac{h}{2} \cos (a + [n-1] h) = \sin \left(a + \frac{2n-1}{2} h\right) - \sin \left(a + \frac{2n-3}{2} h\right).$$

Addirt man diese Gleichheiten und reducirt, so kommt:

$$2 \sin \frac{h}{2} \Big(\cos a + \cos [a+h] + \cos [a+2h] + \ldots + \cos (a + [n-1]h)\Big)$$
$$= \sin \left(a + \frac{2n-1}{2} h\right) - \sin \left(a - \frac{h}{2}\right);$$

folglich:

$$\cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \ldots + \cos(a+[n-1]h)$$

$$= \frac{\sin\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right) - \sin\left(a - \frac{h}{2}\right)}{2 \sin \frac{h}{2}}.$$

Verwandelt man endlich den Zähler nach §. 42. in ein Produkt von Sinus und Cosinus, so hat man:

$$\cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \ldots + \cos(a+[n-1]h)$$

$$= \frac{\sin \frac{nh}{2} \cos\left(a + \frac{n-1}{2}h\right)}{\sin \frac{h}{2}},$$

welches die gesuchte Formel ist.

Setzt man darin $\frac{\pi}{2} - a$ statt a und $-h$ statt h, so erhält man:

$$\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin(a+[n-1]h)$$

$$= \frac{\sin \frac{nh}{2} \sin\left(a + \frac{n-1}{2}h\right)}{\sin \frac{h}{2}}.$$

Allgemeine Theilung der Kreisbogen.

§. 75. Man soll $\cos \frac{a}{m}$ finden, wenn $\cos a = A$ gegeben ist. — Wenn man in der ersten der Gleichungen (1) in §. 59, $\frac{a}{m}$ statt a und x, $\sqrt{1-x^2}$, A resp. statt $\cos \frac{a}{m}$, $\sin \frac{a}{m}$. cos a setzt; so erhält man:

(1) $$f(x) - A = o,$$

wo f (x) ein ganzes rationales Polynom des m^{ten} Grades ist, so daß unsere Aufgabe von der Auflösung einer Gleichung des m^{ten} Grades abhängt, was auch leicht a priori einleuchtet. Denn wenn α den kleinsten positiven Bogen bezeichnet, dessen Cosinus $= A$ ist, so sind die Werthe von a in der allgemeinen Formel:

$$2 k \pi \pm \alpha$$

enthalten, und der Gleichung (1) muß genügt werden, wenn man für x den Cosinus irgend eines der Bogen:

$$\frac{2k\pi}{m}+\frac{\alpha}{m},\ \frac{2k\pi}{m}-\frac{\alpha}{m}$$

nimmt, wo k wieder irgend eine ganze Zahl bezeichnet. Wenn man in einer der beiden letzten Formeln der Zahl k zwei Werthe gibt, welche um ein Vielfaches von m verschieden sind, so erhält man zwei Bogen, welche um ein Vielfaches von 2 π verschieden und deren Cosinus folglich gleich sind. Man braucht also der Zahl k nur m aufeinanderfolgende Werthe, etwa 0, 1, 2, ... m — 1, beizulegen, und es ist sogar überflüssig, beide obige Formeln zu betrachten. Denn wenn man der Zahl k in der ersten Formel einen gewissen Werth und in der zweiten einen Werth, welcher den ersten zu m ergänzt, gibt; so erhält man zwei Bogen, deren Summe $= 2\pi$ ist, und welche folglich denselben Cosinus haben. Die Unbekannte x kann demnach nur m Werthe haben, welche im Allgemeinen verschieden und die Cosinus der m Bogen sind:

$$\frac{\alpha}{m},\ \frac{2\pi}{m}+\frac{\alpha}{m},\ \frac{4\pi}{m}+\frac{\alpha}{m},\ \ldots\ \frac{2(m-1)\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}.$$

Wir können uns hier auf die algebraische Auflösung der Gleichung (1) nicht näher einlassen, wollen aber noch bemerken: daß, wenn m eine zusammengesetzte Zahl np ist, sich die Auflösung der Gleichung (1) auf die einer Gleichung vom n^{ten} und einer andern vom p^{ten} Grade zurückführen läßt. — Denn setzt man $\cos\frac{a}{n} = y$, so hat man zur Bestimmung von x eine Gleichung des p^{ten} Grades:

$$\psi\,(x) - y = o,$$

wo y durch eine Gleichung des n^{ten} Grades:

$$\varpi\,(y) - A = o$$

gegeben wird. — Die Gleichung (1) ergibt sich übrigens durch Elimination von y zwischen den beiden letzten Gleichungen. Wenn ferner n eine zusammengesetzte Zahl q r wäre, so ließe sich die Auflösung der Gleichung $\varpi\,(y) - A = o$ auf die einer Gleichung vom q^{ten} und einer Gleichung vom r^{ten} Grade zurückführen; u. s. f.

§. 76. Es sei m eine ungerade Zahl, prim, oder nicht, und $A = 1$, so ist $\alpha = o$, und die Gleichung (1) geht alsdann in folgende über:

$$(2)\qquad f\,(x) - 1 = o,$$

deren Wurzeln die Cosinus der Bogen:

$$o, \frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots \frac{2(m-1)\pi}{m}$$

sind.

Der erste dieser Bogen hat einen Cosinus = 1 und die übrigen Bogen haben denselben Cosinus, weil sie sich paarweise zu 2π ergänzen. Der erste Theil der Gleichung (2) ist folglich durch $x - 1$ theilbar, und der Quotient ist ein Quadrat $[\varphi(x)]^2$, so daß man hat:

$$f(x) = 1 + (x-1)[\varphi(x)]^2.$$

Die Gleichung (1) kann also auf folgende Form gebracht werden:

$$(x-1)[\varphi(x)]^2 + 1 - A = o,$$

wo $\varphi(x)$ ein Polynom des $\frac{m-1}{2}$ten Grades ist, und die Wurzeln der Gleichung:

$$\varphi(x) = o$$

sind die Cosinus der Bogen:

$$\frac{2\pi}{m}, \frac{4\pi}{m}, \ldots \frac{(m-1)\pi}{m}.$$

Die Bestimmung von $\cos\frac{2\pi}{m}$ hängt also nur von einer Gleichung des $\frac{m-1}{2}$ten Grades ab.

Später werden wir ein einfaches Verfahren zur Bildung des Polynomes $\varphi(x)$ angeben.

§. 77. Man soll $\sin\frac{a}{m} = x$ finden, wenn $\sin a = A$ gegeben ist. — Wenn man in der zweiten der Gleichungen (1) in §. 59, $\frac{a}{m}$ statt a und resp. x, $\sqrt{1-x^2}$, A statt $\sin\frac{a}{m}$, $\cos\frac{a}{m}$, $\sin a$ setzt; so erhält man:

$$f(x) - A = o,$$

wo f (x) ein ganzes rationales Polynom des m^{ten} Grades ist, dessen sämmtliche Glieder von einem ungeraden Grade sind, wenn m eine ungerade Zahl ist. — Die Aufgabe ist also von einer Gleichung des m^{ten} Grades abhängig. Aber wenn m eine gerade Zahl ist, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\sqrt{1-x^2}\, f(x) = A,$$

wo f (x) ein Polynom vom $(m-1)^{ten}$ Grade bezeichnet, dessen Glieder alle von einem ungeraden Grade sind. Wenn man beide Theile der letzten Gleichung zum Quadrate erhebt, so kommt:

$$(1-x^2)\,[f(x)]^2 - A^2 = o.$$

Die Aufgabe hängt also in diesem Falle von einer Gleichung des $2m^{ten}$ Grades ab, welche sich jedoch auf eine Gleichung des m^{ten} Grades bringen läßt, wenn man $x^2 = x'$ setzt, weil sie nur gerade Potenzen von x enthält.

Zu denselben Folgerungen gelangt man auch durch das früher wiederholt angewandte Verfahren. Denn ist α der kleinste positive Bogen, dessen Sinus = A ist und k eine ganze Zahl; so sind die Werthe von x die Sinus der Bogen:

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m},\quad \frac{(2k+1)\pi}{m} - \frac{\alpha}{m},$$

und man braucht der Zahl k nur m aufeinanderfolgende Werthe, etwa 0, 1, 2, 3, . . . m—1, zu geben; denn wenn man k zwei Werthe gibt, welche um ein Vielfaches von m verschieden sind, so gibt jede der beiden letzten Formeln zwei Bogen, welche denselben Sinus haben. Diese zwei Bogen können aber nur denselben Sinus haben, so lange α unbestimmt bleibt; denn ihre Differenz ist kleiner als 2π, und ihre Summe, worin α vorkommt, kann nur für besondere Werthe von α eine ungerade Anzahl von π betragen.

Wir wollen nun sehen, ob zwei Bogen wie:

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m},\quad \frac{(2k'+1)\pi}{m} - \frac{\alpha}{m}$$

denselben Sinus haben können. — Ihre Differenz enthält α und kann im Allgemeinen keiner ungeraden Anzahl von π gleich sein. Ihre Summe ist gleich:

$$\frac{2k+2k'+1}{m}\,\pi$$

und kann keiner ungeraden Anzahl von π gleich sein, wenn m gerade ist. In diesem Falle kann also x, 2m verschiedene Werthe haben. Aber wenn m ungerade ist, so kann man immer, was die zwischen o und m liegende ganze Zahl k auch für einen Werth haben mag, doch stets eine ebenfalls zwischen o und m liegende ganze Zahl k' finden, welche so beschaffen ist: daß:

$$2k + 2k' + 1 = m \text{ oder } = 3m,$$

d. h.:

$$k' = \frac{m-1}{2} - k\text{, ober } = \frac{3m-1}{2} - k$$

ist. Wenn also m ungerade ist, so kann x nur m Werthe haben.

Wenn m gerade ist, so sind die Sinus der Bogen jeder der beiden obigen Formeln offenbar paarweise gleich und von entgegengesetztem Zeichen — und es lassen sich hier ähnliche Bemerkungen machen, wie bei der vorhergehenden Aufgabe.

§. 78. Wenn $\cos a$ gegeben ist, so ergibt sich ebenso: daß die Bestimmung von $\sin \frac{a}{m}$ von einer Gleichung des $2m^{ten}$ Grades abhängt, und wenn $\sin a$ gegeben ist, die Bestimmung von $\cos \frac{a}{m}$ von einer Gleichung des m^{ten}, oder $2m^{ten}$ Grades, je nachdem m ungerade, oder gerade ist.

Wenn endlich $\tan a$ gegeben ist, so ist die Bestimmung von $\tan \frac{a}{m}$ in allen Fällen von der Auflösung einer Gleichung des m^{ten} Grades abhängig.

Auflösung der binomischen Gleichung $z^m = 1$.

§. 79. Wenn die Gleichung:

$$(1) \qquad z^m = 1$$

eine imaginäre Wurzel hat, so ist dieselbe offenbar von der Form:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi,$$

so daß man hat:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^m = \cos m\varphi + i \sin m\varphi = 1;$$

also:

$$\cos m\varphi = 1,\ \sin m\varphi = o,$$

mithin:

$$m\varphi = 2k\pi,\ \varphi = \frac{2k\pi}{m}.$$

Der Gleichung (1) geschieht also durch alle in der Formel:

$$(2) \qquad z = \cos \frac{2k\pi}{m} + i \sin \frac{2k\pi}{m}$$

enthaltene Werthe von z Genüge.

Sollen zwei Werthe k', k'' von k gleichen Werthen von z entsprechen, so ist erforderlich und zureichend: daß die Differenz der Argumente:

$$\frac{2k'\pi}{m},\ \frac{2k''\pi}{m}$$

ein Vielfaches von 2π sei, oder $k' - k''$ ein Vielfaches von m.

Die Formel (2) gibt folglich m verschiedene Werthe für z, und nicht mehr, welche man erhält, wenn man zwischen $-\infty$ und $+\infty$ der ganzen Zahl k irgend welche m successive Werthe, etwa:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots m-1,$$

beilegt. Die Gleichung (1) hat eine, oder zwei reelle Wurzeln, je nachdem m ungerade, oder gerade ist, und die imaginären Wurzeln derselben sind paarweise conjugirt. Man erhält in jedem Falle zwei conjugirte imaginäre Wurzeln, wenn man in der Formel (2) der Zahl k zwei Werthe beilegt, welche sich gegenseitig zu m ergänzen; denn wenn man in dieser Formel $m-k$ statt k setzt, so geht sie in folgende über:

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} - i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Hieraus folgt: daß die m Wurzeln der Gleichung (1) in der Formel:

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} \pm i\sin\frac{2k\pi}{m}$$

enthalten sind, worin man der Zahl k nur die Werthe:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{m}{2},$$

oder:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \frac{m-1}{2}$$

zu geben braucht, je nachdem m gerade, oder ungerade ist.

Im ersten Falle entsprechen die beiden reellen Wurzeln $k = o$ und $k = \frac{m}{2}$, und im zweiten Falle entspricht die eine reelle Wurzel $k = o$.

Wenn m ungerade ist, so kann man die Gleichung $z^m - 1 = o$ auf dem $\frac{m-1}{2}$ ten Grad bringen. — Zu dem Zwecke braucht man ihren ersten Theil nur durch $z-1$ zu dividiren und dann zu setzen:

$$z + \frac{1}{z} = x,$$

wodurch man eine Gleichung mit x:

$$\varphi\,(x) = o$$

erhält, welche vom $\frac{m-1}{2}$ ten Grade ist, und deren Wurzeln bekanntlich den doppelten reellen Bestandtheilen der imaginären Wurzeln der gegebenen Gleichung gleich sind. — Diese Wurzeln werden also durch die Formel:

$$x = 2 \cos \frac{2 k \pi}{m}$$

ausgedrückt, worin man k die Werthe 1, 2, ... $\frac{m-1}{2}$ geben muß. Das Polynom φ (x) unterscheidet sich also von dem in §. 76. nur durch den Faktor 2, womit alle Wurzeln multiplicirt sind.

Eigenschaften der Wurzeln der Gleichung $z^m = 1$.

§. 80. 1) Wenn man setzt:

$$\alpha = \cos \frac{2 \pi}{m} + i \sin \frac{2 \pi}{m},$$

so ist nach der Moivre'schen Formel:

$$\alpha^k = \cos \frac{2 k \pi}{m} + i \sin \frac{2 k \pi}{m},$$

und folglich können die m Wurzeln der Gleichung $z^m = 1$ durch:

$$\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^{m-1},$$

d. h. durch die successiven Potenzen einer derselben ausgedrückt werden.

2) Wenn m = np ist, wo n und p prim unter sich sind; so erhält man alle Wurzeln der Gleichung:

$$z^m = 1,$$

wenn jede der n Wurzeln der Gleichung $z^n = 1$ mit jeder der p Wurzeln der Gleichung $z^p = 1$ multiplicirt wird.

Denn wenn

$$\alpha = \cos \frac{2 k \pi}{np} + i \sin \frac{2 k \pi}{np}$$

eine Wurzel der Gleichung $z^{np} = 1$ ist, indem n, p prim unter sich sind; so kann man stets zwei Zahlen ξ, η von solcher Beschaffenheit finden, daß:

$$p \xi + n \eta = k \text{ oder } \frac{2 \xi \pi}{n} + \frac{2 \eta \pi}{p} = \frac{2 k \pi}{np}$$

ist, und alsdann hat man:

$$\alpha = \left(\cos\frac{2\xi\pi}{n} + i\sin\frac{2\xi\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\eta\pi}{p} + i\sin\frac{2\eta\pi}{p}\right),$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellet.

3) Die algebraische Auflösung der Gleichung $z^m=1$, wo m eine zusammengesetzte Zahl ist, läßt sich zurückführen auf die von Gleichungen derselben Form, deren Grade **Primzahlen**, oder Potenzen von Primzahlen sind, durch welche m theilbar ist.

Denn ist $m = npq \ldots$, wo $n, p, q \ldots$ Primzahlen, oder Potenzen ungleicher Primzahlen sind, so erhält man die Wurzeln der Gleichung $z^{np} = 1$, wenn man jede Wurzel von $z^n = 1$ mit jeder von $z^p = 1$ multiplicirt. Ebenso erhält man die Wurzeln von $z^{npq} = 1$, wenn man jede Wurzel von $z^{np} = 1$ mit jeder von $z^q = 1$ multiplicirt; u. s. f.

Regelmäßige Vielecke.

§. 81. Wenn man sich den Kreisumfang in m gleiche Theile getheilt und die aufeinanderfolgenden Theilungspunkte durch gerade Linien verbunden denkt, so erhält man ein in den Kreis beschriebenes regelmäßiges Vieleck von m Seiten. — Wenn n eine Zahl bezeichnet, die kleiner als m und prim zu m ist, und man verbindet die Theilungspunkte von n zu n, oder von $m-n$ zu $m-n$; so kommt man erst dann zum Ausgangspunkte zurück, nachdem man alle Spitzen durchlaufen hat, und die so erhaltene Figur wird ein regelmäßiges Sternpolygon genannt. — Aber wenn m und n einen gemeinschaftlichen Divisor Θ haben, so geht man nur durch $\frac{m}{\Theta}$ Spitzen, und die erhaltene Figur ist ein regelmäßiges Vieleck von nur $\frac{m}{\Theta}$ Seiten. — Es gibt also so viele regelmäßige Vielecke von m Seiten, als Primzahlen zu m, die kleiner als $\frac{m}{2}$ sind.

Das Problem der Theilung des Kreisumfanges in m gleiche Theile läuft auf die algebraische Auflösung der Gleichung:

$$z^m = 1$$

hinaus; denn die Wurzeln dieser Gleichung werden nach dem Obigen durch die Formel:

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$$

ausgedrückt, und $\frac{2k\pi}{m}$ ist der Bogen, welcher zu der Seite des Vieleckes gehört, welches man erhält, wenn man die Theilungspunkte von k zu k verbindet. Man kennt also die trigonometrischen Linien dieses Bogens, wenn man die Gleichung:

$$z^m = 1$$

auflösen kann.

Wir wollen jetzt die Theilung des Kreisumfanges in 3, 5, 15 und 17 gleiche Theile näher erörtern.

§. 82. **Theilung des Kreisumfanges in 3 gleiche Theile.** — Diese Aufgabe ist von der Auflösung der Gleichung:

$$z^3 - 1 = 0$$

abhängig.

Dividirt man ihren ersten Theil mit $z - 1$, so kommt:

$$z^2 + z + 1 = 0,$$

und wenn man jetzt setzt:

$$z + \frac{1}{z} = x;$$

so erhält man:

$$x + 1 = 0.$$

Die Wurzel -1 dieser letzten Gleichung ist $= 2\cos\frac{2\pi}{3}$, oder $= -2\cos\frac{\pi}{3}$, oder $= -2\sin\frac{\pi}{6}$. Man hät folglich:

$$2\sin\frac{\pi}{6} = 1,$$

welches der Werth der Seite des regelmäßigen Sechseckes ist, woraus sich der Werth der Seite des regelmäßigen (gleichseitigen) Dreieckes leicht ergibt.

§. 83. **Theilung des Kreisumfanges in 5 gleiche Theile.** — Diese Aufgabe hängt von der Auflösung der Gleichung:

$$z^5 - 1 = 0$$

ab. Dividirt man ihren ersten Theil mit $z - 1$ und setzt:

$$z + \frac{1}{z} = x,$$

so erhält man die Gleichung:

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

deren Wurzeln sind:

$$2\cos\frac{2\pi}{5},\ 2\cos\frac{4\pi}{5},$$

oder:

$$2\sin\frac{\pi}{10},\ -2\sin\frac{3\pi}{10}.$$

Wenn man die letzte Gleichung auflöst, so erhält man:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

folglich:

$$2\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ 2\sin\frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

welches die Werthe der Seite des gewöhnlichen regelmäßigen Zehneckes und des Sternzehneckes sind, woraus sich die für die Seite des regelmäßigen gewöhnlichen Fünfeckes und des Sternfünfecks leicht ergeben.

§. 84. Theilung des Kreisumfanges in 15 gleiche Theile. — Sie hängt ab von der Gleichung:

(1) $$z^{15} - 1 = 0,$$

woraus die Wurzeln von $z^3 - 1 = 0$, $z^5 - 1 = 0$ entfernt werden müssen. Dividirt man daher mit:

$$\frac{(z^3-1)(z^5-1)}{z-1},$$

so kommt:

(2) $$z^8 - z^7 + z^5 - z^4 + z^3 - z + 1 = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung mit z^4 und setzt:

$$z + \frac{1}{z} = x,$$

so erhält man die Gleichung:

(3) $$x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0,$$

deren Wurzeln sind:

$$2\cos\frac{2\pi}{15},\ 2\cos\frac{4\pi}{15},\ 2\cos\frac{8\pi}{15},\ 2\cos\frac{14\pi}{15},$$

oder:

$$2\sin\frac{11\pi}{30},\ 2\sin\frac{7\pi}{30},\ -2\sin\frac{\pi}{30},\ -2\sin\frac{13\pi}{30}$$

und die Werthe der Seiten des gewöhnlichen regelmäßigen und des Sternpolygones von 30 Seiten ausdrücken.

Die 15 Wurzeln der Gleichung (1) werden erhalten, wenn man jede der 3 Wurzeln von $z^3 - 1 = 0$ mit jeder der 5 Wurzeln

von $z^5 - 1 = 0$ multiplicirt (§. 80.), woraus leicht folgt: daß die 8 Wurzeln der Gleichung (2) erhalten werden, wenn man jede der 2 Wurzeln von $z^2 + z + 1 = 0$ mit jeder der 4 Wurzeln von $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, welche man leicht finden kann, multiplicirt. — Man kennt also die Wurzeln der Gleichung (2), und folglich auch die der Gleichung (3). — Uebrigens zeigen sehr einfache algebraische Betrachtungen: daß sich die Gleichung (3) durch Elimination von y zwischen den beiden Gleichungen:

$$x^2 - yx + (y-2) = 0,$$
$$y^2 - y - 1 = 0$$

ergibt, so daß ihre Auflösung auf die zweier quadratischer Gleichungen zurückgeführt ist.

---

§. 85. Theilung des Kreisumfanges in 17 gleiche Theile. — In diesem Falle ist m eine Primzahl von der Form $2\mu + 1$, und wenn man den ersten Theil der Gleichung:

$$(1) \qquad z^m - 1 = 0$$

durch $z - 1$ dividirt und dann $z + \frac{1}{z} = x$ setzt; so erhält man:

$$(2) \quad x^{\mu} + x^{\mu-1} - (\mu-1)x^{\mu-2} - (\mu-2)x^{\mu-3} + \frac{(\mu-2)(\mu-3)}{1.2}x^{\mu-4} + \frac{(\mu-3)(\mu-4)}{1.2}x^{\mu-5} - \ldots = 0.$$

Von dieser Gleichung ist die Theilung des Kreisumfanges in $2\mu + 1$ gleiche Theile unmittelbar abhängig; ihre μ Wurzeln werden ausgedrückt durch die Formel:

$$x = 2\cos\frac{2k\pi}{2\mu+1} = 2\cos ka,$$

worin man für k die μ Werthe:

$$1, 2, 3, \ldots \mu,$$

oder Werthe, welche nur um Vielfache von $2\mu + 1$ davon verschieden sind, setzen muß.

Es sei n eine primitive Wurzel für die Primzahl $2\mu + 1$, so sind die μ Wurzeln der Gleichung (2) folgende:

$$(3) \qquad 2\cos a,\ 2\cos na,\ 2\cos n^2a, \ldots 2\cos n^{\mu-1}a;$$

denn offenbar genügt jede dieser μ Größen der Gleichung (2), und es braucht nur bewiesen zu werden: daß sie alle verschieden sind.

Gesetzt, es wäre möglich: daß zwei dieser Größen einander gleich seien, und daß man hätte:

$$2 \cos n^p a = 2 \cos n^q a,$$

wo p, q kleiner als μ sind; so wäre:

$$n^p a \pm n^q a = 2 k' \pi,$$

wo k' eine ganze Zahl bedeutet. Da aber $a = \frac{2\pi}{2\mu + 1}$ ist, so wäre:

$$\frac{n^q (n^{p-q} \pm 1)}{2\mu + 1}$$

eine ganze Zahl. Weil aber $2\mu + 1$ eine Primzahl ist, und $n < 2\mu + 1$, so müßte $2\mu + 1$ die Zahl $n^{p-q} + 1$, oder die Zahl $n^{p-q} - 1$, und folglich ihr Produkt:

$$n^{2p-2q} - 1$$

ohne Rest theilen, was nicht möglich ist, weil $2p - 2q < 2\mu$ und n eine primitive Wurzel von $2\mu + 1$ ist. — Die Größen (3) drücken folglich alle Wurzeln der Gleichung (2) aus.

Setzt man nun:

$$x = 2 \cos a, \quad \Theta x = 2 \cos na,$$

so hat man:

$$\Theta^2 x = 2 \cos n^2 a, \quad \Theta^3 x = 2 \cos n^3 a, \ldots \Theta^{\mu-1} x = 2 \cos n^{\mu-1} a,$$

und die Wurzeln der Gleichung (2) werden ausgedrückt durch:

$$x, \Theta x, \Theta^2 x, \ldots . \Theta^{\mu-1} x.$$

Außerdem ist $\Theta^{\mu} x = x$; denn da n eine primitive Wurzel von $2\mu + 1$ ist, so hat man:

$$n^{\mu} \equiv -1 \text{ (mod. } 2\mu + 1\text{)}, \text{*)}$$

---

*) Wenn die Differenz zweier positiver, oder negativer ganzer Zahlen a, b durch eine dritte positive Zahl p ohne Rest theilbar ist, so heißen a, b nach p congruent oder äquivalent, p der Modulus, a der Rest von b und b der von a nach dem Modulus p.

Wenn also a, b nach p congruent sind, so ist:

$$\frac{a-b}{p} = q \text{ oder } a = b + pq,$$

wo der Quotient q eine ganze Zahl ist. — Dieses drückt Gauß (Disquisitiones Arithmeticae) kürzer durch die Bezeichnung:

$$a \equiv b \text{ (mod. p)}. \qquad (\alpha)$$

aus.

und endlich ist Θx eine rationale Funktion von x, weil sich cos nx als rationale Funktion von cos x ausdrücken läßt. Die Gleichung (2) gehört also zu der Art von Gleichungen, welche sich algebraisch auflösen lassen, und die rationale Funktion Θx wird ausgedrückt durch:

$$\Theta x = x^n + x^{n-1} - (n-1) x^{n-2} - (n-2) x^{n-3} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} x^{n-4} + \dots.$$

Man hat also, wenn man bekannte algebraische Lehren auf die Gleichung (2) anwendet, folgende Sätze:

1) Wenn $\mu = m_1 m_2 \dots m_\omega$ ist, so kann man mittelst ω Gleichungen von den resp. Graden $m_1, m_2, \dots m_\omega$ den ganzen Kreisumfang in $2\mu + 1$ gleiche Theile theilen; und wenn die Zahlen $m_1, m_2, \dots m_\omega$ prim unter sich sind, so sind die Coefficienten dieser Gleichungen rationale Zahlen.

2) Wenn $\mu = 2^\omega$ ist, so kann man mittelst ω Quadratwurzelausziehungen den Kreisumfang in $2\mu + 1$ gleiche Theile theilen. Mit andern Worten: wenn

---

Wenn also r der Rest der Division von a durch p ist, so hat man:

$$a \equiv r \text{ (mod. p)},$$

und wenn a durch p ohne Rest theilbar ist:

$$a \equiv o \text{ (mod. p)}.$$

Ein Ausdruck wie (α) wird eine Congruenz genannt, und die „Theorie der Zahlen" oder „höhere Arithmetik" löst in Beziehung auf die Congruenzen dieselben Probleme, wie die Algebra über die gewöhnlichen Gleichungen; namentlich beschäftigt sie sich damit: die Werthe von x zu finden, welche einer Congruenz wie:

$$f(x) \equiv o \text{ (mod. p)}$$

genügen, wo f (x) ein ganzes rationales Polynom mit ganzen Coefficienten bezeichnet. — Solche Werthe von x heißen Wurzeln der Congruenz. — Insbesondere nennt man primitive Wurzeln einer binomischen Congruenz:

$$x^m \equiv 1 \text{ (mod. p)},$$

wo p eine Primzahl und p — 1 durch m theilbar ist, diejenigen, welche keiner Congruenz von derselben Form und von einem niedrigern Grade angehören — und primitive Wurzeln einer Primzahl p werden die primitiven Wurzeln der Congruenz:

$$x^{p-1} \equiv 1 \text{ (mod. p)}$$

genannt.

$2\mu+1$ eine Primzahl und $\mu=2^{\omega}$ ist, so kann man mittelst des Lineales und des Zirkels den Kreisumfang in $2\mu+1$ gleiche Theile theilen.

3) Um den Kreisumfang in $2\mu+1$ gleiche Theile zu theilen, braucht man denselben nur in 2μ gleiche Theile zu theilen, einen Bogen, welcher sich alsdann construiren läßt, in 2μ gleiche Theile, und die Quadratwurzel aus einer einzigen Größe zu ziehen.

Dieser letzte Satz rührt von Gauß her, welcher außerdem bewiesen hat: daß die Größe, woraus man die zweite Wurzel ziehen muß, die ganze Zahl $2\mu+1$ ist, was Abel auf folgende Weise dargethan hat:

Wenn ϱ diese Größe bezeichnet, so ist ϱ der Zahlenwerth des Produktes:

$$(x+\alpha\Theta x+\alpha^2\Theta^2x+\ldots+\alpha^{\mu-1}\Theta^{\mu-1}x)(x+\alpha^{\mu-1}\Theta x+\alpha^{\mu-2}\Theta^2x+\ldots+\alpha\Theta^{\mu-1}x),$$

wo:

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{\mu}+i\sin\frac{2\pi}{\mu}$$

ist. Man hat folglich:

$$\pm\varrho=4(\cos a+\alpha\cos na+\alpha^2\cos n^2a+\ldots+\alpha^{\mu-1}\cos n^{\mu-1}a)$$
$$\times(\cos a+\alpha^{\mu-1}\cos na+\alpha^{\mu-2}\cos n^2a+\ldots+\alpha\cos n^{\mu-1}a).$$

Entwickelt man dieses Produkt, so erhält man ein Resultat von folgender Form:

$$\pm\varrho=t_0+t_1\alpha+t_2\alpha^2+\ldots+t_{\mu-1}\alpha^{\mu-1},$$

und man findet leicht:

$$t_m=4[\cos a\cos n^m a+\cos na\cos n^{m+1}a+\ldots+\cos n^{\mu-1-m}a\cos n^{\mu-1}a)$$
$$+4(\cos n^{\mu-m}a\cos a+\cos n^{\mu-m+1}a\cos na+\ldots+\cos n^{\mu-1}a\cos n^{m-1}a).$$

Vermöge der Formel:

$$\cos n^p a\cos n^{m+p}a=\tfrac{1}{2}\cos(n^{m+p}a+n^pa)+\tfrac{1}{2}\cos(n^{m+p}a-n^pa)$$

nimmt der Werth von t_m folgende Form an:

$$t_m=2(\cos[n^m+1]a+\cos[n^m+1]na+\cos[n^m+1]n^2a+\ldots$$
$$+\cos[n^m+1]n^{\mu-1}a)$$
$$+2(\cos[n^m-1]+\cos[n^m-1]na+\cos[n^m-1]n^2a+\ldots$$
$$+\cos[n^m-1]n^{\mu-1}),$$

oder wenn man

$$(n^m + 1)\, a = a',\ (n^m - 1)\, a = a''$$

setzt:

$$t_m = 2\cos a' + \Theta 2\cos a' + \Theta^2 2\cos a' + \ldots + \Theta^{\mu-1} 2\cos a'$$
$$+ 2\cos a'' + \Theta 2\cos a'' + \Theta^2 2\cos a'' + \ldots + \Theta^{\mu-1} 2\cos a''.$$

Nehmen wir nun zunächst an: daß nicht $m = o$ ist, so sind $2\cos a'$ und $2\cos a''$ Wurzeln der Gleichung (2); folglich:

$$2\cos a' = \Theta^{\delta} x \text{ und } 2\cos a'' = \Theta^{\varepsilon} x,$$

und man hat:

$$t_m = (\Theta^{\delta} x + \Theta^{\delta+1} x + \ldots + \Theta^{\mu-1} x + x + \Theta x + \ldots + \Theta^{\delta-1} x)$$
$$+ (\Theta^{\varepsilon} x + \Theta^{\varepsilon+1} x + \ldots + \Theta^{\mu-1} x + x + \Theta x + \ldots + \Theta^{\varepsilon-1} x)$$

oder: $$t_m = 2(x + \Theta x + \Theta^2 x + \ldots + \Theta^{\mu-1} x),$$

d. h. t_m ist der doppelten Summe der Wurzeln der Gleichung (2) gleich; also: $t_m = -2.$

Nehmen wir jetzt $m = o$, so ist:

$$t_o = 2(\cos 2a + \cos 2na + \cos 2n^2 a + \ldots + \cos 2n^{\mu-1} a) + 2\mu.$$

Nun ist aber $2\cos 2a$ Wurzel der Gleichung (2); setzt man also:

$$2\cos 2a = \Theta^{\delta} x,$$

so erhält man:

$$t_o = (\Theta^{\delta} x + \Theta^{\delta+1} x + \ldots + \Theta^{\mu-1} x + x + \Theta x + \ldots + \Theta^{\delta-1} x) + 2\mu,$$

und folglich: $t_o = 2\mu - 1.$

Hiernach ist:

$$\pm \varrho = 2\mu - 1 - 2(\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\mu-1}),$$

und da:

$$\alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{\mu-1} = -1$$

ist; so folgt endlich:

$$\pm \varrho = 2\mu + 1,$$

was bewiesen werden sollte.

§. 86. Setzen wir jetzt $2\mu + 1 = 17$ oder $\mu = 8$, so geht die Gleichung (2) in folgende über:

(1′) $$x^8 + x^7 - 7x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 10x^3 - 10x^2 - 4x + 1 = 0,$$

und ihre in der Formel:

$$x = 2\cos\frac{2k\pi}{17}$$

enthaltenen Wurzeln können dargestellt werden durch:

(2′) $$x,\ \Theta x,\ \Theta^2 x,\ \Theta^3 x,\ \Theta^4 x,\ \Theta^5 x,\ \Theta^6 x,\ \Theta^7 x.$$

Die kleinste primitive Wurzel von 17 ist 3, und die Reste der Potenzen:

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4,\ 3^5,\ 3^6,\ 3^7$$

in Bezug auf 17 sind:

$$1,\ 3,\ 9,\ 10,\ 13,\ 5,\ 15,\ 11.$$

Setzt man also der Abkürzung wegen:

$$a = \frac{2\,\pi}{17},$$

so werden die Größen (2′):

$$2\cos a,\ 2\cos 3\,a,\ 2\cos 9\,a,\ 2\cos 10\,a,\ 2\cos 13\,a,$$
$$2\cos 5\,a,\ 2\cos 15\,a,\ 2\cos 11\,a.$$

Bei Anwendung der allgemeinen Methode muß man zunächst eine rationale und symmetrische Funktion y der Größen:

$$2\cos a,\ 2\cos 9\,a,\ 2\cos 13\,a,\ 2\cos 15\,a$$

berechnen. Setzt man also:

$$y = 2\cos a + 2\cos 9\,a + 2\cos 13\,a + 2\cos 15\,a,$$

so hängt y von einer Gleichung des zweiten Grades ab, deren beide Wurzeln sind:

$$(3') \qquad y = 2\cos a + 2\cos 9\,a + 2\cos 13\,a + 2\cos 15\,a,$$
$$(4') \qquad y_1 = 2\cos a + 2\cos 10\,a + 2\cos 5\,a + 2\cos 11\,a.$$

Diese Gleichung läßt sich sehr leicht bilden; denn zunächst hat man nach der Gleichung (1′):

$$(5') \qquad y + y_1 = -1,$$

und wenn man das Produkt yy_1 bildet, die Produkte der Cosinus vermittelst der bekannten Formeln in Summen umsetzt und endlich die identische Gleichung:

$$\cos\,(17 - m)\,a = \cos ma$$

beachtet; so erhält man:

$$yy_1 = 4\,[2\cos a + 2\cos 13\,a + 2\cos 9\,a + 2\cos 10\,a + 2\cos 13\,a$$
$$+ 2\cos 5\,a + 2\cos 15\,a + 2\cos 11\,a],$$

und wegen (1′) ist:

$$(6') \qquad yy_1 = -4.$$

Die Gleichung mit y ist also:

$$(7') \qquad y^2 + y - 4 = o,$$

und ihre beiden Wurzeln können als bekannt angesehen werden.

Ferner sind die Größen:

$$2\cos a,\ 2\cos 9\,a,\ 2\cos 13\,a,\ 2\cos 15\,a$$

Wurzeln einer Gleichung des vierten Grades, deren Coefficienten rationale Funktionen von y sind, und mit welcher wir wie mit der

gegebenen Gleichung verfahren wollen. — Nach dem allgemeinen Verfahren müssen wir zunächst wieder eine rationale symmetrische Funktion z der Größen:

$$2 \cos a,\ 2 \cos 13 a$$

suchen, und mithin setzen:

$$z = 2 \cos a + 2 \cos 13 a;$$

so ist die Gleichung mit z vom zweiten Grade, und ihre Wurzeln sind:

$$(8') \qquad z = 2 \cos a + 2 \cos 13 a,$$

$$(9') \qquad z_1 = 2 \cos 9 a + 2 \cos 15 a.$$

Zunächst hat man:

$$(10') \qquad z + z_1 = y,$$

und für das Produkt zz_1 findet man, wenn man die Produkte der Cosinus in Summen umsetzt:

$$zz_1 = 2 \cos a + 2 \cos 3 a + 2 \cos 9 a + 2 \cos 10 a + 2 \cos 13 a + 2 \cos 5 a + 2 \cos 15 a + 2 \cos 10 a,$$

oder weil die Summe der Wurzeln der Gleichung (1′) gleich — 1 ist:

$$(11') \qquad zz_1 = -1.$$

Die Gleichung mit z ist folglich:

$$(12') \qquad z^2 - yz - 1 = 0$$

Endlich bleibt noch die Gleichung des zweiten Grades zu bilden, deren Wurzeln sind:

$$2 \cos a,\ 2 \cos 13 a,$$

und deren Coefficienten sich als rationale Funktionen von y und z ausdrücken lassen. — Hier läßt sich jedoch die allgemeine Methode vereinfachen. Wir wollen zu dem Zwecke die Gleichung des vierten Grades betrachten, deren Wurzeln:

$$2 \cos 3 a,\ 2 \cos 10 a,\ 2 \cos 5 a,\ 2 \cos 11 a$$

eine Summe $= y_1$ haben, und sie wie die Gleichung behandeln, deren Wurzeln eine Summe $= y$ haben. — Zuerst bildet man eine Gleichung des zweiten Grades, deren Wurzeln sind:

$$(13') \qquad u = 2 \cos 3 a + 2 \cos 5 a,$$

$$(14') \qquad u_1 = 2 \cos 10 a + 2 \cos 11 a,$$

und wenn man wieder wie oben verfährt; so findet man:

$$(15') \qquad u + u_1 = y_2,$$

$$(16') \qquad uu_1 = -1.$$

Die Gleichung mit u ist folglich:

$$(17') \qquad u^2 - y_1 u - 1 = 0,$$

und u, u_1 sind wie z, z_1 bekannt.

Setzt man nun:

$$(18') \qquad x = 2 \cos a,$$

$$(19') \qquad x_1 = 2 \cos 13\, a,$$

so hat man zunächst:

$$(20') \qquad x + x_1 = z,$$

und dann:

$$x x_1 = 4 \cos a \cos 13\, a = 2 \cos 14\, a + 2 \cos 12\, a$$
$$= 2 \cos 3\, a + 2 \cos 5\, a,$$

oder:

$$(21') \qquad x x_1 = u,$$

und mithin sind x, x_1 Wurzeln der Gleichung:

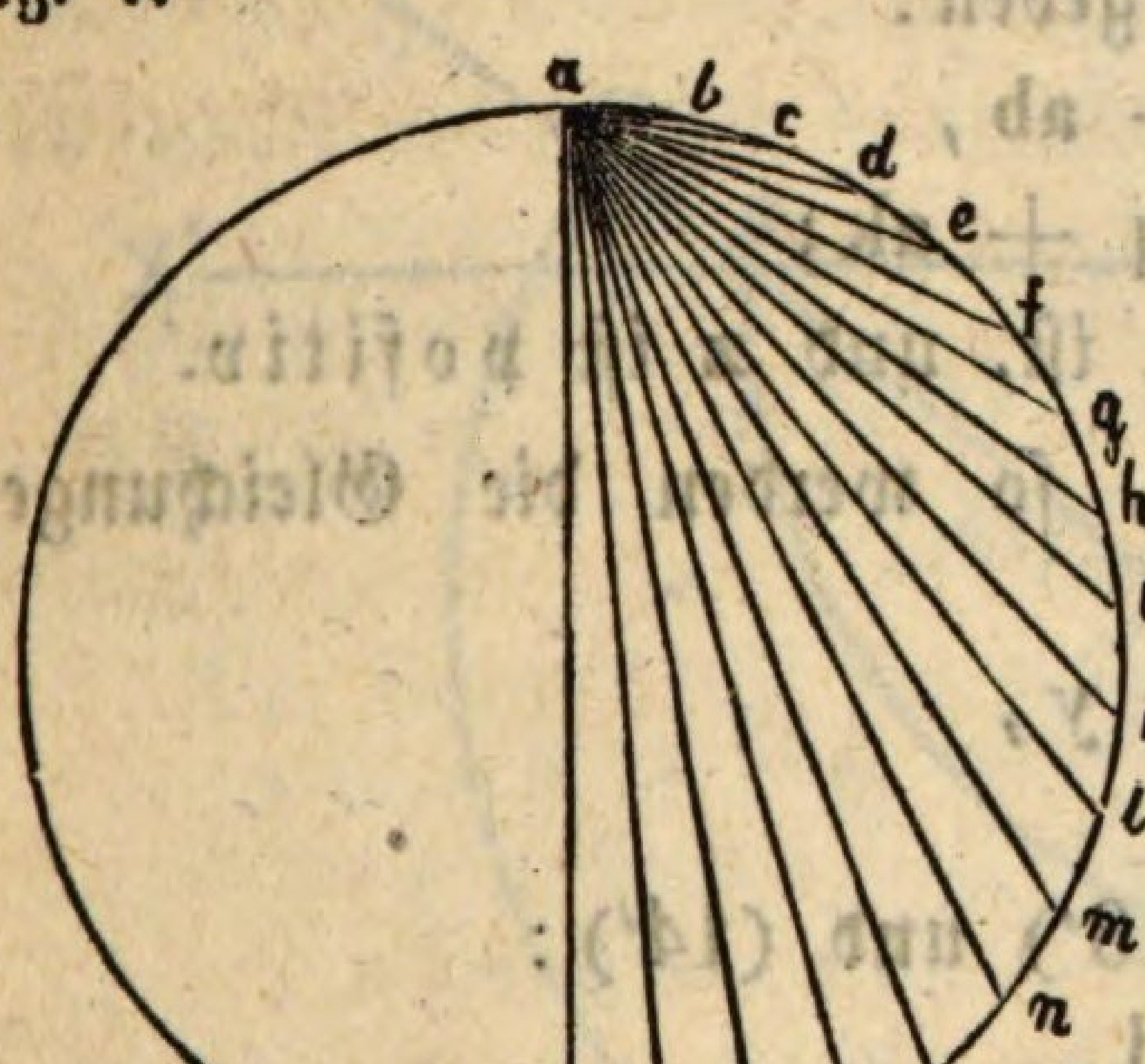
$$(22') \qquad x^2 - z x + u = 0.$$

Die Auflösung der Gleichung (1′) ist also zurückgeführt auf die der quadratischen Gleichungen (7′), (12′), (17′) und (22′), mithin die Aufgabe gelöst.

§. 87. Geometrische Construktion des regelmäßigen Siebenzehneckes. — So wie man in der Elementargeometrie die Construktion des regelmäßigen in den Kreis beschriebenen Dreieckes und Fünfeckes aus der des regelmäßigen Sechseckes und Zehneckes ableitet, ebenso wollen wir hier zuerst ein regelmäßiges Vieleck von 34 Seiten in den Kreis beschreiben, woraus sich alsdann das regelmäßige Siebenzehneck unmittelbar ergibt.

Ein Halbkreis (Fig. 7) sei in den Punkten a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n, o, p, q, r, s in 17 gleiche Theile getheilt, so ist die Sehne ab die Seite des in den Kreis beschriebenen regelmäßigen Vieleckes von 34 Seiten, und die Sehnen ad, af, ah, ak, am, ao, aq sind die Diagonalen dieses Vieleckes, oder die Seiten der regelmäßigen Sternvielecke von 34 Seiten, welche man in den Kreis beschreiben kann. Nimmt man den Halbmesser des Kreises = 1, und setzt wie oben:

Fig. 7.



$$a = \frac{2\pi}{17},$$

so hat man:

$$ab = 2 \sin \frac{\pi}{34} = + 2 \cos 13 a,$$

$$ad = 2 \sin \frac{3\pi}{34} = - 2 \cos 5 a,$$

$$af = 2 \sin \frac{5\pi}{34} = + 2 \cos 3 a,$$

$$ah = 2 \sin \frac{7\pi}{34} = - 2 \cos 11 a,$$

$$ak = 2 \sin \frac{9\pi}{34} = + 2 \cos 15 a,$$

$$am = 2 \sin \frac{11\pi}{34} = - 2 \cos 10 a,$$

$$ao = 2 \sin \frac{13\pi}{34} = + 2 \cos a,$$

$$aq = 2 \sin \frac{15\pi}{34} = - 2 \cos 9 a.$$

Werden alle frühern Bezeichnungen beibehalten, so geben die Gleichungen (3′) und (4′):

$$y = ao - aq + ab + ak,$$
$$y_1 = af - am - ad - ah.$$

Offenbar ist y_1 negativ, weil $af < am$ ist; folglich ist y positiv, weil $yy_1 = -1$ ist. Setzt man also $y_1 = -y'$, so werden die Gleichungen (5′) und (6′):

$$y' - y = 1,$$
$$yy' = 4.$$

Die Gleichungen (8′) und (9′) geben:

$$z = ao + ab,$$
$$z_1 = - aq + ak;$$

also ist z_1 negativ, weil $aq > ak$ ist, und z ist positiv.

Wenn man $z_1 = -z'$ setzt, so werden die Gleichungen (10′) und (11′):

$$z - z' = y,$$
$$zz' = 1.$$

Ebenso geben die Gleichungen (13′) und (14′):

$$u = af - ad,$$
$$u_1 = - am - ah;$$

also ist u_1 negativ und u positiv. — Setzt man $u_1 = -u'$, so geben die Gleichungen (15′) und (16′):

$$u' - u = y',$$
$$uu' = 1.$$

Endlich geben die Gleichungen (18′) und (19′):

$$x = ao,$$
$$x_1 = ab,$$

so daß x und x_1 positiv sind, und die Gleichungen (20′), (21′) behalten ihre frühere Form:

$$x + x_1 = z,$$
$$xx_1 = u.$$

Die Seite des 34 Eckes ist $= x_1$, und zur Construktion derselben genügt es:

1) Zwei Linien y und y' von solcher Beschaffenheit zu construiren, daß ist:

$$y - y' = 1, \; yy' = 4;$$

2) vier Linien z, z', u, u' von solcher Beschaffenheit, daß ist:

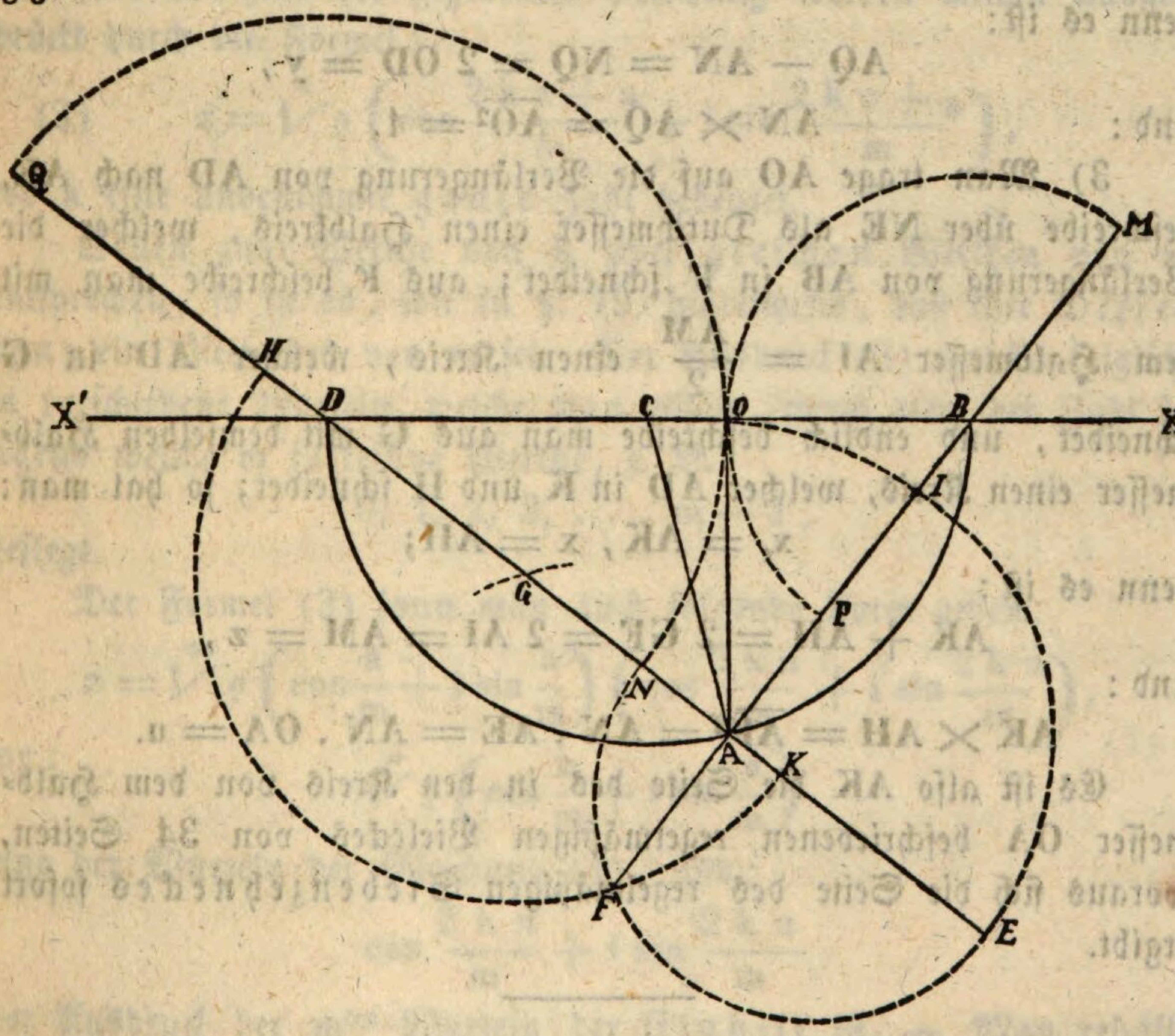
$$z - z' = y, \; zz' = 1,$$
$$u' - u = y', \; uu' = 1, \text{ und}$$

3) zwei Linien x, x_1 von der Beschaffenheit, daß ist:

$$x + x_1 = z, \; xx_1 = u.$$

Construktion. 1) In einem Punkte O (Fig. 8) einer

Fig. 8.



unbegrenzten geraden Linie X′X errichte man ein Perpendikel OA gleich dem Halbmesser des Kreises, d. h. $= 1$, nehme OC $= {}^1/_4$, beschreibe dann aus C mit CA als Halbmesser einen Halbkreis, welcher X′X in B und D schneidet; so hat man:

$$OB = {}^1/_2\, y,\ OD = {}^1/_2\, y';$$

denn es ist:

$$2\,OD - 2\,OB = 4\,OC = 1,$$

und:

$$2\,OD \times 2\,OB = 4\,\overline{OA}^2 = 4.$$

2) Man ziehe AB, und aus dem Punkte B beschreibe man mit dem Halbmesser OB einen Halbkreis, welcher die verlängerte Linie AB in M und P schneidet; so ist:

$$AM = z,\ AP = z';$$

denn es ist:

$$AM - AP = PM = 2\,OB = y,$$

und:

$$AM \times AP = \overline{OA}^2 = 1.$$

Ebenso ziehe man AD und beschreibe aus D mit dem Halbmesser OD einen Halbkreis, welcher die verlängerte AD in N und Q schneidet; so hat man:

$$AN = u,\ AQ = u';$$

denn es ist:

$$AQ - AN = NQ = 2\,OD = y,$$

und:

$$AN \times AQ = \overline{AO}^2 = 1.$$

3) Man trage AO auf die Verlängerung von AD nach AE, beschreibe über NE als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die Verlängerung von AB in F schneidet; aus F beschreibe man mit dem Halbmesser AI $= \frac{AM}{2}$ einen Kreis, welcher AD in G schneidet, und endlich beschreibe man aus G mit demselben Halbmesser einen Kreis, welcher AD in K und H schneidet; so hat man:

$$x_1 = AK,\ x = AH;$$

denn es ist:

$$AK + AH = 2\,GF = 2\,AI = AM = z,$$

und:

$$AK \times AH = \overline{AF}^2 = AN\,.\,AE = AN\,.\,OA = u.$$

Es ist also AK die Seite des in den Kreis von dem Halbmesser OA beschriebenen regelmäßigen Vieleckes von 34 Seiten, woraus sich die Seite des regelmäßigen Siebenzehneckes sofort ergibt.

Auflösung der binomischen und trinomischen Gleichungen.

§. 88. Wir wollen jetzt die allgemeine binomische Gleichung:

$$z^m = A + Bi$$

auflösen, wo A, B gegebene Zahlen sind, welche positiv, null, oder negativ sein können. Wenn ϱ und a resp. den Modulus und das Argument des imaginären Ausdruckes A + Bi bezeichnen, so wird die obige Gleichung:

$$(1) \qquad z^m = \varrho\,(\cos a + i \sin a).$$

Setzt man nun:

$$(2) \qquad z = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi),$$

so hat man:

$$z^m = r^m\,(\cos m\varphi + i \sin m\varphi),$$

und damit der Ausdruck (2) der Gleichung (1) genügt, ist erforderlich und hinreichend, daß man habe (§. 57.):

$$r^m = \varrho,\ m\varphi = 2k\pi + a,$$

woraus folgt:

$$r = \sqrt[m]{\varrho},\ \varphi = \frac{2k\pi + a}{m}.$$

Die Wurzeln der gegebenen Gleichung werden mithin ausgedrückt durch die Formel:

$$(3) \qquad z = \sqrt[m]{\varrho}\left(\cos\frac{2k\pi + a}{m} + i \sin\frac{2k\pi + a}{m}\right),$$

wo k eine unbestimmte ganze Zahl bedeutet.

Sollen zwei Werthe von k zwei gleichen Werthen von z entsprechen, so ist es, wie in §. 79, hinreichend, daß ihre Differenz ein Vielfaches von m sei. Der Ausdruck (3) enthält folglich m verschiedene Wurzeln, welche man erhält, wenn man der Zahl k irgend welche m successive Werthe, z. B.:

$$0, 1, 2, 3, \ldots m-1,$$

beilegt.

Der Formel (3) kann man auch folgende Form geben:

$$z = \sqrt[m]{\varrho}\left(\cos\frac{a}{m} + i \sin\frac{a}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i \sin\frac{2k\pi}{m}\right),$$

wo:

$$\sqrt[m]{\varrho}\left(\cos\frac{a}{m} + i \sin\frac{a}{m}\right)$$

eine der Wurzeln der Gleichung (1), und:

$$\cos\frac{2k\pi}{m} + i \sin\frac{2k\pi}{m}$$

der Ausdruck der m^{ten} Wurzeln der Einheit ist. — Man erhält

also die m Wurzeln der Gleichung (1), wenn man eine derselben mit den m Wurzeln der Einheit multiplicirt.

Nach §. 79. kann man die Wurzeln der Gleichung (1) auch durch die Formel:

$$(4)\qquad z = \sqrt[m]{\varrho}\left(\cos\frac{a}{m} + i\sin\frac{a}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} \pm \sin\frac{2k\pi}{m}\right)$$

ausdrücken, wo man k nur die Werthe 0, 1, 2, . . . $\frac{m}{2}$, wenn m gerade ist, und nur die Werthe 0, 1, 2, . . . $\frac{m-1}{2}$, wenn m ungerade ist, zu geben braucht.

§. 89. In dem besondern Falle, wo $B = o$ ist, hat man:

$$\varrho = A, \text{ oder } \varrho = -A,$$

je nachdem A positiv, oder negativ ist, und man kann $a = o$, oder $a = \pi$ setzen, je nachdem m gerade, oder ungerade ist. — Die Wurzeln der Gleichung:

$$z^m = + A$$

werden also ausgedrückt durch die Formel:

$$(5)\qquad z = \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{m} \pm i\sin\frac{2k\pi}{m}\right),$$

und die der Gleichung:

$$z^m = - A$$

durch die Formel:

$$(6)\qquad z = \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{[2k+1]\pi}{m} \pm i\sin\frac{[2k+1]\pi}{m}\right).$$

In (5) und (6) braucht man k nur die Werthe 0, 1, 2, . . . $\frac{m}{2}$ zu geben.

§. 90. Es sei nun die trinomische Gleichung:

$$(1)\qquad z^{2m} + pz^m + q = o$$

aufzulösen, wo p, q gegebene Größen sind; so folgt daraus:

$$(2)\qquad z^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

und man hat folglich blos noch zwei binomische Gleichungen aufzulösen. — Wir wollen insbesondere den Fall betrachten, wo:

$$\frac{p^2}{4} - q < o$$

ist, indem p, q reelle Zahlen sind, und es sei:

$$-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{2}-q}=\varrho\,(\cos a+i\sin a);$$

so bekommt die Gleichung (1) folgende Form:

$$z^{2m}-2\,\varrho\,z^m\cos a+\varrho^2=o,$$

und die Gleichung (2) wird:

$$z^m=\varrho\,(\cos a\pm i\sin a).$$

Die Wurzeln der Gleichung:

$$z^m=\varrho\,(\cos a+i\sin a)$$

sind in der Formel:

$$z=\sqrt[m]{\varrho}\left(\cos\frac{2k\pi+a}{m}+i\sin\frac{2k\pi+a}{m}\right)$$

enthalten, wo man k die Werthe 0, 1, 2, . . . m — 1 geben muß. Ebenso können die Wurzeln der Gleichung:

$$z^m=\varrho\,(\cos a-i\sin a)$$

durch die Formel:

$$z=\sqrt[m]{\varrho}\left(\cos\frac{2k\pi-a}{m}-i\sin\frac{2k\pi-a}{m}\right)$$

ausgedrückt werden, wenn man k die m aufeinanderfolgenden Werthe 0, — 1, — 2, . . . — (m—1) beilegt. — Folglich sind die 2 m Wurzeln der gegebenen Gleichung alle in der Formel:

$$z=\sqrt[m]{\varrho}\left(\cos\frac{2k\pi+a}{m}\pm i\sin\frac{2k\pi+a}{m}\right)$$

enthalten, wo man für k nur m ganze aufeinanderfolgende Zahlen zu nehmen braucht.

Theoreme von Moivre und Cotes.

§. 91. Der Zweck dieser Theoreme ist: die **geometrische** Bedeutung der reellen Divisoren des Trinomes:

$$x^{2m}\pm 2\,x^m\cos a+1$$

und des Binomes:

$$x^m\pm 1$$

nachzuweisen, wo a ein gegebener Winkel ist.

Die beiden linearen Faktoren, welche zwei **conjugirten** Wurzeln der Gleichung:

$$x^{2m}-2\,x^m\cos a+1=0$$

entsprechen, werden ausgedrückt durch:

$$x - \left(\cos\frac{2k\pi + a}{m} + i\sin\frac{2k\pi + a}{m}\right),$$

$$x - \left(\cos\frac{2k\pi + a}{m} - i\sin\frac{2k\pi + a}{m}\right).$$

Das Produkt dieser beiden Faktoren ist:

$$y_k^2 = x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi + a}{m} + 1,$$

und man hat identisch:

(1) $$x^{2m} - 2x^m\cos a + 1 = (y_0\, y_1\, y_2 \ldots y_{m-1})^2.$$

Setzt man $\pi + a$ statt a, und:

$$y_k'^2 = x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi + a}{m} + 1,$$

so hat man:

(2) $$x^{2m} + 2x^m\cos a + 1 = (y'_0\, y'_1\, y'_2 \ldots y'_{m-1})^2.$$

Betrachtet man nun einen Kreis von dem Halbmesser $= 1$, theilt denselben in den Punkten A_0, A_1, A_2, ... A_{2m-1} in $2m$ gleiche Theile, verbindet den Mittelpunkt O mit allen diesen Theilungspunkten, zieht eine gerade Linie OP, welche mit dem ersten Halbmesser OA_0 den Winkel $\frac{a}{m}$ bildet, nimmt auf dieser Linie eine beliebige Länge $OP = x$ und verbindet endlich den Punkt P mit den Theilungspunkten; so geben die Dreiecke OPA_{2m-2k}, $OPA_{2m-2k-1}$:

$$\overline{PA}^2_{2m-2k} = x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi + a}{m} + 1,$$

$$\overline{PA}^2_{2m-2k-1} = x - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi + a}{m} + 1,$$

und folglich:

$$PA_{2m-2k} = y_k,\quad PA_{2m-2k-1} = y'_k.$$

Hieraus folgt: daß das Trinom:

$$x^{2m} - 2x^m\cos a + 1$$

dem Quadrate des Produktes aus den Entfernungen des Punktes P von den Punkten A_0, A_2, A_4, ... und das Trinom:

$$x^{2m} + 2x^m\cos a + 1$$

dem Quadrate des Produktes aus den Entfernungen desselben Punktes P von den Punkten A_1, A_3, A_5, ... gleich ist, worin das Moivre'sche Theorem besteht.

Wenn der Winkel $a = o$ ist, so liegt der Punkt P auf dem

Halbmesser OA_0, und die Gleichungen (1), (2) geben, wenn man aus beiden Theilen die Quadratwurzel auszieht:

$$x^m - 1 = \pm y_0\, y_1, \ldots y_{m-1},$$
$$x^m + 1 = y'_0\, y'_1\, y'_2 \ldots y'_{m-1}.$$

In diesen beiden letzten Gleichungen besteht das Theorem von Cotes, und man muß in der ersten das Zeichen $+$, oder $-$ nehmen, je nachdem der Punkt P außerhalb, oder innerhalb des Kreises liegt.

Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

§. 92. Man kann jede Gleichung des dritten Grades auf folgende Form bringen:

$$(1) \qquad x^3 + px + q = o,$$

wo p, q reell sind. Setzt man:

$$x = y + z,$$

so wird die Gleichung (1):

$$(y + z)^3 + (y + z)\,p + q = o,$$

oder:

$$y^3 + z^3 + (p + 3yz)(y + z) + q = o.$$

Ueber eine der Unbestimmten y, z kann man nach Belieben verfügen, und wenn man setzt:

$$(2) \qquad yz = -\frac{p}{3};$$

so kommt:

$$(3) \qquad y^3 + z^3 = -q.$$

Folglich sind y^3, z^3 die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$t^2 - qt - \frac{p^2}{27} = o,$$

woraus folgt:

$$(4) \quad \begin{cases} y^3 = -\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}, \\[2ex] z^3 = -\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen (4) geben 3 Werthe für y und 3 Werthe für z; aber man muß, um eine Wurzel $y + z$ der Gleichung (1) zu erhalten, nur die Werthe von y und z verbinden, welche der Gleichung (2) genügen, d. h. ein reelles Produkt haben.

Es sei $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = o$, oder $= -$, wozu erfordert wird, daß p negativ sei, und wir wollen setzen:

$$-\frac{q}{2} = \varrho \cos \omega,\ \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\varrho^2 \sin^2 \omega;$$

so haben wir zur Bestimmung von ϱ und ω die Gleichungen:

$$\varrho = \sqrt{\frac{-p^3}{27}},\ \cos \omega = \frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{-\frac{p^3}{27}}},$$

und die Gleichungen (4) werden:

$$y^3 = \varrho (\cos \omega + i \sin \omega),$$
$$z^3 = \varrho (\cos \omega - i \sin \omega),$$

woraus folgt:

$$y = \sqrt[3]{\varrho}\left(\cos \frac{2 k \pi + \omega}{3} + i \sin \frac{2 k \pi + \omega}{3}\right),$$
$$z = \sqrt[3]{\varrho}\left(\cos \frac{2 k \pi + \omega}{3} - i \sin \frac{2 k \pi + \omega}{3}\right),$$

und worin man k die drei Werthe 0, 1, 2 geben muß. — Auch muß k in diesen beiden Formeln denselben Werth haben, damit das Produkt yz reell wird. Die Wurzeln der gegebenen Gleichung werden also durch die Formel:

$$x = 2 \sqrt[3]{\varrho} \cos \frac{2 k \pi + \omega}{3}$$

ausgedrückt, und sind mithin:

$$2 \sqrt[3]{\varrho} \cos \frac{\omega}{3},\ 2 \sqrt[3]{\varrho} \cos \frac{2 \pi + \omega}{3},\ 2 \sqrt[3]{\varrho} \cos \frac{4 \pi + \omega}{3}.$$

Diese Ausdrücke sind logarithmisch brauchbar, und man sieht, daß die drei Wurzeln der gegebenen Gleichung reell sind. Die zwei letzten werden einander gleich, wenn $\omega = o$ oder $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = o$ ist.

§. 93. Es sei jetzt $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = +$ und A, B seien die reellen Werthe von y, z, welche den Gleichungen (4) genügen, so daß:

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ist. Es sei α eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit, so ist die andere $= \alpha^2$; die Werthe von y sind:

$$A, A\alpha, A\alpha^2,$$

und die von z:

$$B, B\alpha, B\alpha^2.$$

Da die Werthe von y und z, welche man addiren muß, um eine Wurzel der Gleichung (1) zu erhalten, ein reelles Produkt geben müssen; so sind diese Wurzeln:

$$A + B,$$
$$A\alpha + B\alpha^2,$$
$$A\alpha^2 + B\alpha,$$

oder:

$$A + B \text{ und } -\frac{A+B}{2} \pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3};$$

denn es ist:

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ und } \alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Wie man sieht, ist nur eine Wurzel reell, und wir wollen nun zeigen, wie man sie mittelst Logarithmen berechnen kann. Es sind hierbei zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem p positiv, oder negativ ist.

1) Es sei $p = -$, so kann man, da nach der Voraussetzung

$$\frac{-p^3}{27} < \frac{q^2}{4}$$

ist, setzen:

$$\sqrt{\frac{-p^3}{27}} = \frac{q}{2}\sin\omega,$$

und alsdann hat man:

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2}\cos\omega} = \sqrt[3]{-q\sin^2 \tfrac{1}{2}\omega},$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2}\cos\omega} = \sqrt[3]{-q\cos^2 \tfrac{1}{2}\omega},$$

oder wenn man für q seinen Werth:

$$\frac{2}{\sin\ \omega}\sqrt{\frac{-p^3}{27}}$$

setzt:

$$A = \sqrt{\frac{-p}{3}}\sqrt[3]{\tang\ {}^1\!/\!_2\ \omega},\ B = \sqrt{\frac{-p}{3}}\sqrt[3]{\cot\ {}^1\!/\!_2\ \omega}.$$

Ist ferner φ ein Hülfswinkel von solcher Beschaffenheit, daß:

$$\tang\ \varphi = \sqrt[3]{\tang\ {}^1\!/\!_2\ \omega}$$

ist; so hat man:

$$A = \sqrt{\frac{-p}{3}}\tang\ \varphi,\ B = \sqrt{\frac{-p}{3}}\cot\ \varphi.$$

Die Wurzeln der Gleichung (1) sind folglich:

$$\sqrt{\frac{-p}{3}}(\tang\ \varphi + \cot\ \varphi),$$

$$-{}^1\!/\!_2\sqrt{\frac{-p}{3}}(\tang\ \varphi + \cot\ \varphi) \pm {}^1\!/\!_2\ i\sqrt{-p}\ (\tang\varphi - \cot\varphi),$$

oder:

$$\frac{2\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\sin\ 2\ \varphi}\ \text{und}\ \frac{-\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\sin\ 2\ \varphi} \pm i\sqrt{-p}\cot\ 2\ \varphi.$$

2) Es sei jetzt p = +, so setze man:

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\tang\ \omega,$$

und alsdann erhält man:

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{q}{2\cos\omega}} = \sqrt[3]{\frac{q\sin^2 {}^1\!/\!_2\ \omega}{\cos\ \omega}},$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{q}{2\cos\omega}} = \sqrt[3]{\frac{-q\cos^2 {}^1\!/\!_2\ \omega}{\cos\ \omega}},$$

oder wenn man für q seinen Werth $\dfrac{2\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\tang\ \omega}$ setzt:

$$A = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\tang\ {}^1\!/\!_2\ \omega},\ B = -\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\cot\ {}^1\!/\!_2\ \omega}.$$

Berechnet man nun wieder einen Hülfswinkel φ von der Beschaffenheit, daß:

$$\tang \varphi = \sqrt[3]{\tang \tfrac{1}{2}\omega},$$

so ist:

$$A = \sqrt{\frac{p}{3}} \tang \varphi, \quad B = -\sqrt{\frac{p}{3}} \cot \varphi,$$

und die Wurzeln der Gleichung (1) sind:

$$\sqrt{\frac{p}{3}} (\tang \varphi - \cot \varphi),$$

$$-\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{3}} (\tang \varphi - \cot \varphi) \pm i \frac{\sqrt{p}}{2} (\tang \varphi + \cot \varphi),$$

oder:

$$2\sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\varphi \text{ und } -\sqrt{\frac{p}{3}} \cot 2\varphi \pm i \frac{\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}.$$

§. 94. Wenn es sich blos um den irreducibeln Fall handelt, so kann man viel einfacher zum Ziele gelangen. Aus der Formel:

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi, \quad (§. 44.)$$

folgt:

(1) $$\cos^3 \varphi - \frac{3}{4}\cos \varphi - \frac{1}{4}\cos 3\varphi = o,$$

und die gegebene cubische Gleichung sei:

(2) $$x^3 - px + q = o.$$

Setzt man nun $x = r \cos \varphi$, also $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ in (1), so erhält man:

(3) $$x^3 - \frac{3}{4} r^2 x - \frac{1}{4} r^3 \cos 3\varphi = o,$$

und durch Vergleichung von (2) und (3):

$$\frac{3}{4} r^2 = p, \text{ also } r = 2\sqrt{\frac{p}{3}},$$

und:

$$\frac{1}{4} r^3 \cos 3\varphi = -q;$$

folglich:

$$\cos 3\varphi = -\frac{3q}{pr} = -\frac{q}{2}\sqrt{\frac{27}{p^3}}.$$

Nimmt man nun aus den Tafeln den Winkel oder Bogen, dessen Cosinus $= -\frac{q}{2}\sqrt{\frac{27}{p^3}}$ ist, so hat man 3φ, also auch φ,

und mithin auch $r\cos\varphi = x$, weil $r = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$ ist. Man hat also eine Wurzel der Gleichung (2). Da aber derselbe Cosinus:

$$-\frac{q}{2}\sqrt{\frac{27}{p^3}}$$

den drei Bogen:

$$3\varphi,\ 2\pi + 3\varphi \text{ und } 2\pi - 3\varphi$$

entspricht, so sind die drei Wurzeln der Gleichung (2):

$$2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\varphi,\ 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{2}{3}\pi + \varphi\right),\ 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \varphi\right),$$

oder wenn man von den beiden letzten Bogen die Supplemente nimmt, deren Cosinus dieselben; aber mit entgegengesetztem Zeichen behaftet sind:

$$2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos\varphi,\ 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos(60^\circ - \varphi),\ 2\sqrt{\frac{p}{3}}\cos(60^\circ + \varphi).$$

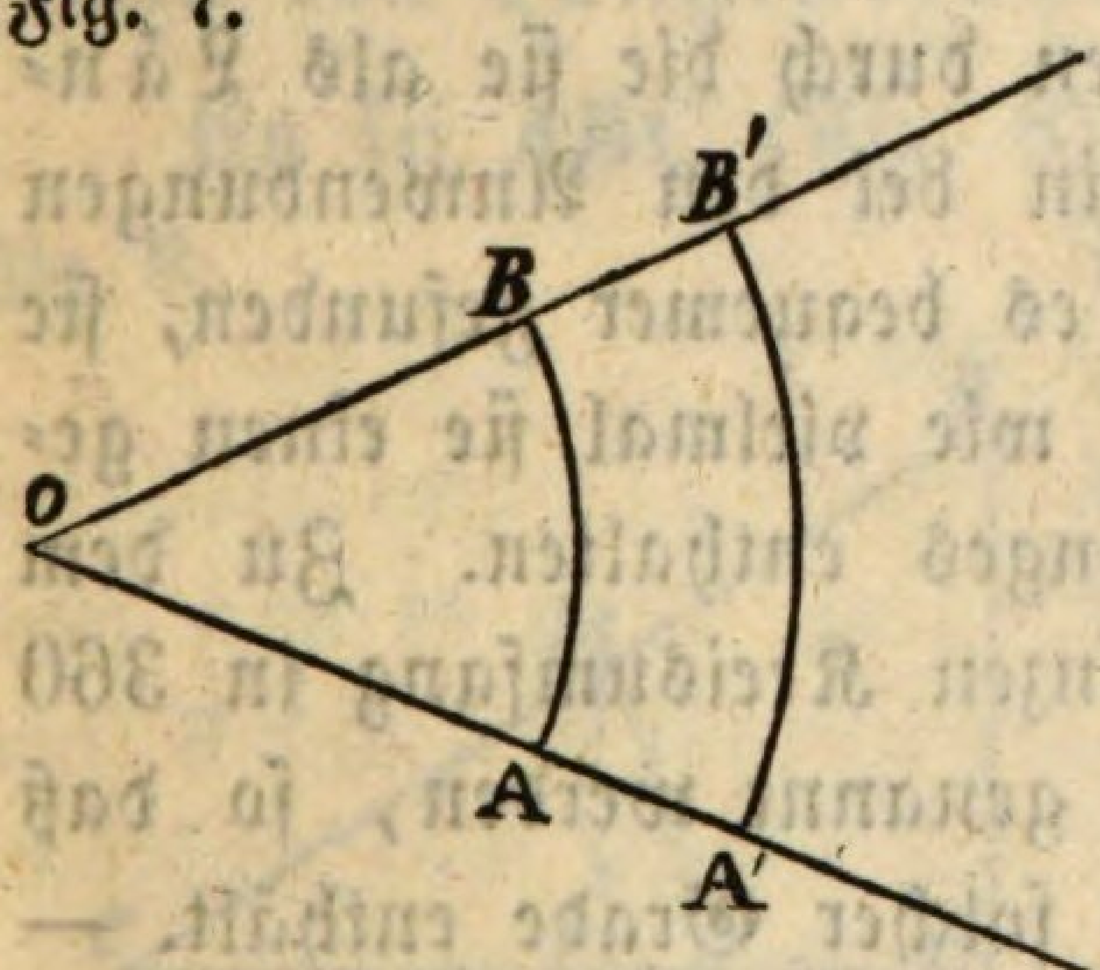
Zweites Buch.

Ebene Trigonometrie.

Zweck derselben. — In jedem Dreiecke sind 6 Elemente zu betrachten, nämlich 3 Seiten und 3 Winkel — und der Zweck der ebenen Trigonometrie besteht in der Auflösung des geradlinigen Dreieckes, d. h. in der Berechnung der Zahlenwerthe seiner Elemente, wenn die zur Bestimmung desselben hinreichenden Größen gegeben sind.

§. 95. Maß der Winkel. — Da die Zahlenwerthe der Längen erhalten werden, wenn man sie auf dieselbe Einheit bezieht, so haben wir blos noch von der Messung der Winkel zu reden. — Es sei **AOB** (Fig. 7) ein beliebiger Winkel, aus dessen

Fig. 7.



Spitze **O** mit irgend einem Halbmesser ein Kreis beschrieben ist, und **R**, **S** seien die Anzahlen von Einheiten, welche in dem Halbmesser **OA** und in dem zwischen den Schenkeln des Winkels liegenden Kreisbogen enthalten sind; so ist das Verhältniß $\frac{S}{R}$ von der Größe des Halbmessers **OA** unabhängig. Denn wenn man aus **O** als Mittelpunkt einen andern Kreis beschreibt und **R′**, **S′** bezeichnen die in dem Halbmesser **OA′** und in dem Bogen **A′B′** enthaltenen Anzahlen von Längeneinheiten; so ist bekanntlich:

$$\frac{S}{R} = \frac{S'}{R'} = \mu;$$

und folglich hängt die Zahl μ blos von der Größe des

Winkels AOB ab. — Da sich ferner der Winkel AOB der Zahl μ proportional ändert, so kann man die Zahl μ als Maß desselben nehmen. — Für S = R reducirt sich μ auf 1 und drückt das Verhältniß des Winkels AOB zu einem gewissen Winkel aus, welchen man zur Winkeleinheit nehmen kann, und so beschaffen ist: daß, wenn man aus seinem Scheitel O als Mittelpunkt mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis beschreibt, der zwischen seinen Schenkeln liegende Bogen diesem Halbmesser gleich ist. — Die Formel:

$$S = R\,\mu$$

wird häufig angewandt, und vermittelst derselben kann man Bogen verschiedener Kreise vergleichen.

Wenn man den Halbmesser OA zur Längeneinheit nimmt, so ist:

$$R = 1 \text{ und } \mu = S,$$

so daß also ein Winkel durch dieselbe Zahl gemessen wird als der zwischen seinen Schenkeln liegende Bogen des mit einem der Längeneinheit gleichen Halbmesser aus seinem Scheitel als Mittelpunkt beschriebenen Kreises. Es findet also in rein abstraktem Sinne zwischen den Winkeln und Bogen vollständige Identität statt, so daß z. B. dieselbe Zahl $\frac{\pi}{2}$ sowohl den rechten Winkel, wie den Quadranten ausdrückt.

§. 96. Bisher haben wir die Bogen durch die sie als Längen messenden Zahlen ausgedrückt; allein bei den Anwendungen der Theorie der Kreisfunktionen hat man es bequemer gefunden, sie dadurch auszudrücken: daß man angibt, wie vielmal sie einen gewissen aliquoten Theil des Kreisumfanges enthalten. Zu dem Zwecke ist man übereingekommen: den ganzen Kreisumfang in 360 gleiche Theile zu theilen, welche Grade genannt werden, so daß der Halbkreis 180 und der Quadrant 90 solcher Grade enthält. — Jeder Grad wird in 60 Minuten und jede Minute in 60 Sekunden getheilt. — Die Grade, Minuten und Sekunden werden resp. mit °, ′, ″ bezeichnet, so daß z. B. ein Bogen von 24 Graden 36 Minuten und 4, 27 Sekunden durch:

$$24^{0}\ 36'\ 4'',\ 27$$

bezeichnet wird.

Wenn S die Länge eines Kreisbogens und N die darin enthaltene Anzahl von Graden bezeichnet, so hat man die Gleichheit:

$$\frac{S}{\pi} = \frac{N}{180},$$

woraus sich jede der Zahlen S und N ergibt, wenn die andere gegeben ist. — Will man z. B. die Anzahl der Grade, Minuten und Sekunden haben, welche ein mit dem Halbmesser = 1 beschriebener Bogen von der Länge = 1 enthält; so hat man:

$$N = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3{,}141592\ldots}$$
$$= 57^{\circ}\ 17'\ 44'',\ 75.$$

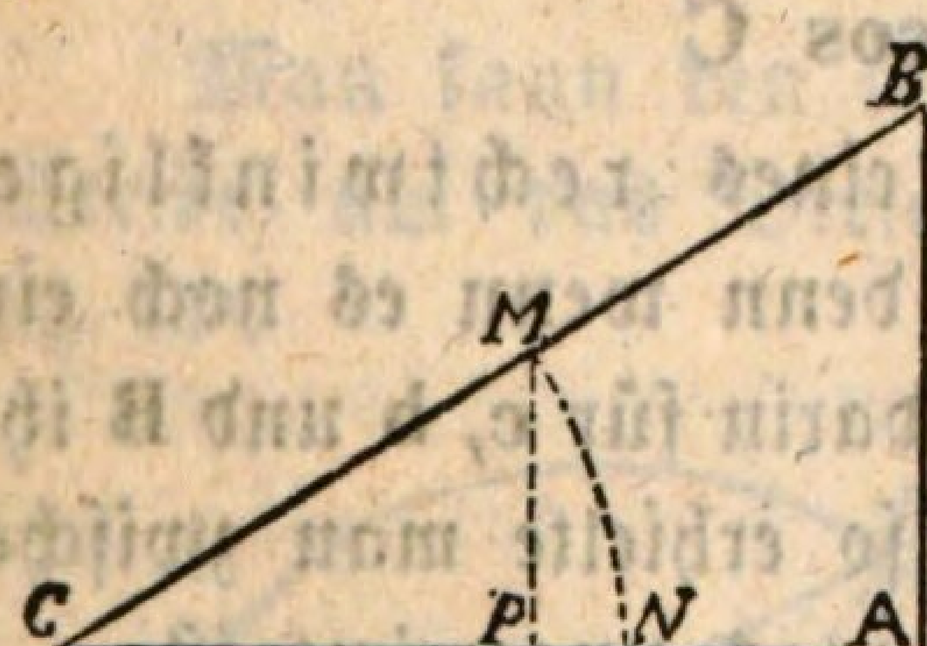
Der einem Bogen zugehörige Winkel enthält also dieselbe Anzahl von Graden, Minuten und Sekunden, als dieser Bogen. — Und unter dem Sinus, Cosinus, der Tangente, Cotangente, Sekante und Cosekante eines Winkels verstehen wir den Sinus, Cosinus, die Tangente, Cotangente, Sekante und Cosekante des aus seiner Spitze als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = 1 zwischen seinen Schenkeln beschriebenen Bogens.

Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines geradlinigen Dreieckes.

§. 97. Die in den drei Winkeln eines geradlinigen oder ebenen Dreieckes enthaltenen Anzahlen von Graden sollen in Zukunft immer mit A, B, C und die in den Gegenseiten enthaltenen Anzahlen von Längeneinheiten mit a, b, c bezeichnet werden.

Es sei ABC (Fig. 8) ein in A rechtwinkliges Dreieck, so hat man, wenn man aus C mit einem Halbmesser = 1 einen Kreisbogen MN beschreibt und das Perpendikel MP auf AB fällt:

Fig. 8.



$$\frac{c}{a} = \frac{MP}{CM},\quad \frac{b}{a} = \frac{CP}{CM},$$

und da:

$$CM = 1,\ MP = \sin C,\ CP = \cos C$$

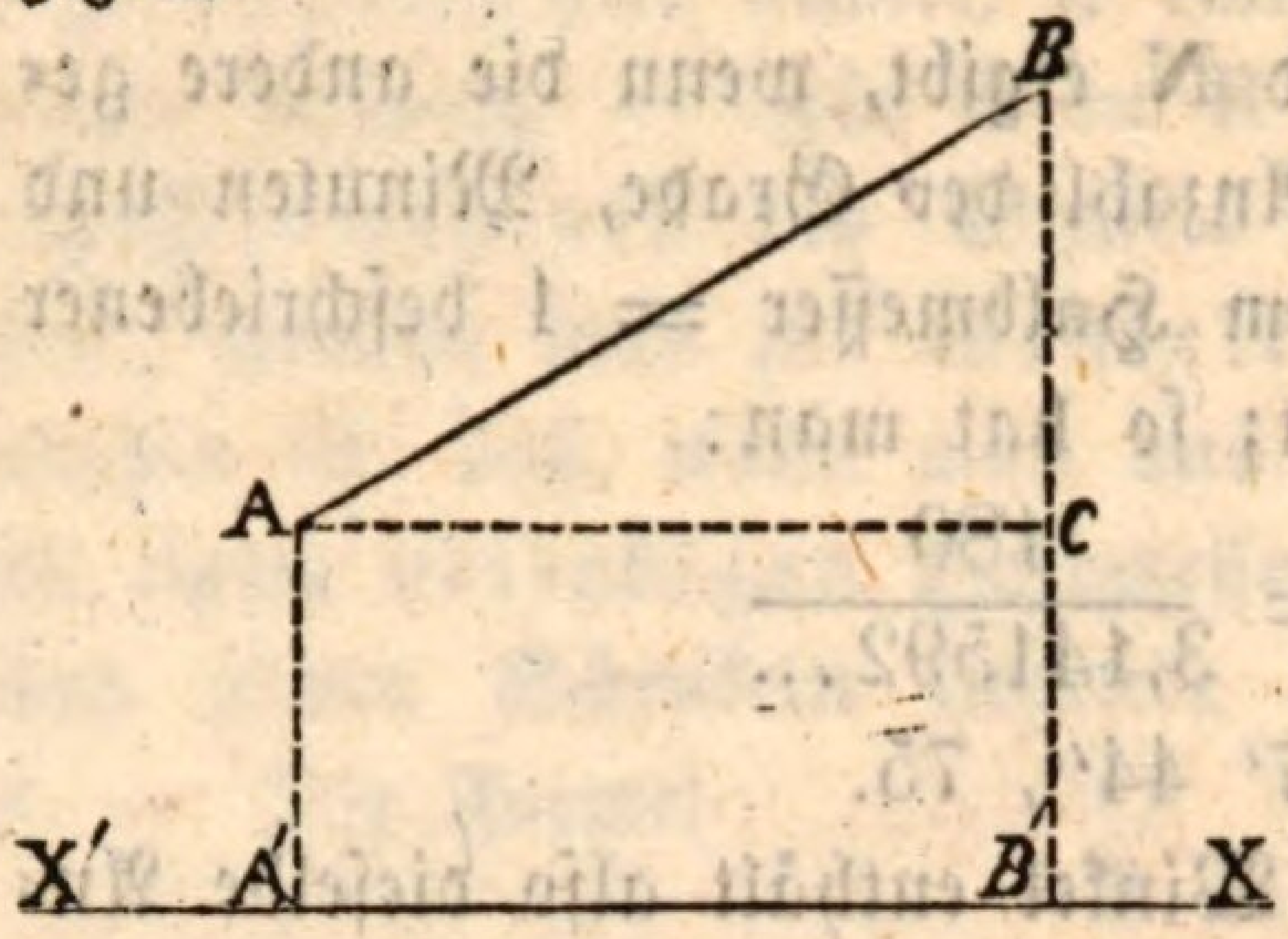
ist; so folgt:

$$c = a \sin C,\ b = a \cos C;$$

d. h. in jedem rechtwinkligen Dreiecke ist jede Kathete gleich der Hypotenuse multiplicirt mit dem Sinus des gegenüberliegenden, oder mit dem Cosinus des anliegenden spitzen Winkels.

Hieraus folgt: daß die **Projektion** $A'B'$ (Fig. 9) einer geraden Linie AB auf eine mit dieser in derselben Ebene liegende Richtung $X'X$ dem Produkte aus dieser geraden Linie und dem Cosinus des Winkels, welchen sie mit der gegebenen Richtung bildet, gleich ist.

Fig. 9.



In Zeichen:

$$A'B' = AB \cos BAC.$$

§. 98. Aus:

$$c = a \sin C \text{ und } b = a \cos C$$

folgt durch Division:

$$\frac{c}{b} = \text{tang } C, \text{ also } c = b \text{ tang } C$$

oder:

$$c = b \cot B;$$

d. h. in jedem rechtwinkligen Dreiecke ist jede Kathete gleich der andern, multiplicirt mit der Tangente des gegenüberliegenden, oder mit der Cotangente des anliegenden spitzen Winkels.

Außer den Relationen:

$$B + C = 90^\circ,$$
$$c = a \sin C, \; b = a \cos C$$

kann es zwischen den Seiten und Winkeln eines rechtwinkligen ebenen Dreieckes keine andern weiter geben; denn wenn es noch eine andere Relation geben könnte, und man setzte darin für c, b und B ihre Werthe a sin C, a cos C und 90° — C, so erhielte man zwischen a und C eine nicht identische Relation, was ungereimt ist.

Aus:

$$c = a \sin C \text{ und } b = a \cos C$$

folgt:

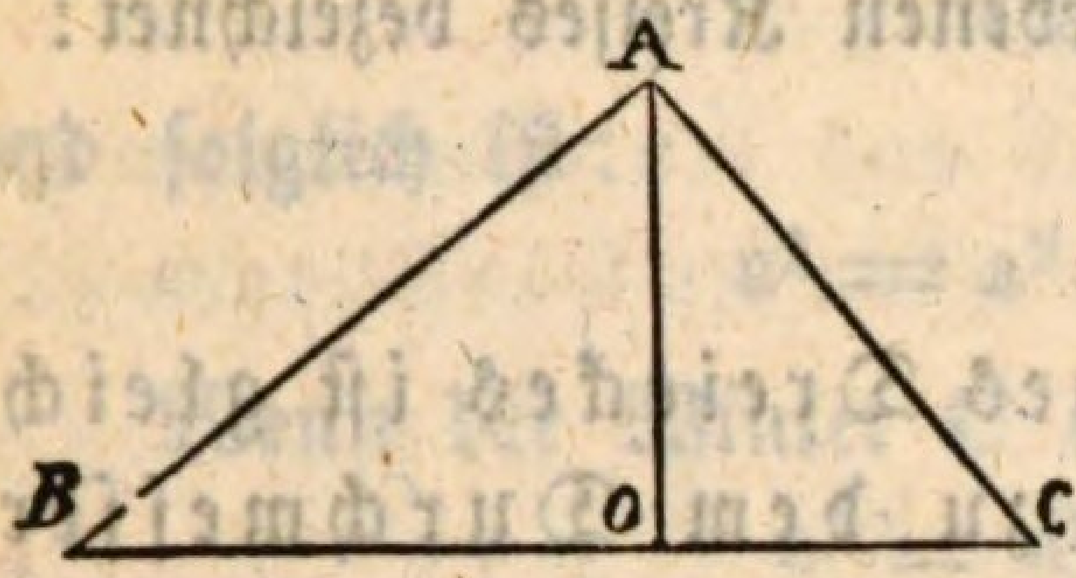
$$c^2 = a^2 \sin^2 C, \; b^2 = a^2 \cos^2 C,$$

also:

$$c^2 + b^2 = a^2 (\sin^2 C + \cos^2 C)$$
$$= a^2.$$

§. 99. Es sei ABC (Fig. 10) ein schiefwinkliges Dreieck, dessen Winkel B und C spitz sind, und AO ein Perpendikel aus der Spitze A auf die Basis BC, so fällt der Punkt O zwischen B und C, und die rechtwinkligen Dreiecke ABO, ACO geben (§. 97.):

Fig. 10.



$$AO = c \sin B, \quad AO = b \sin C,$$

woraus folgt:

$$c \sin B = b \sin C$$

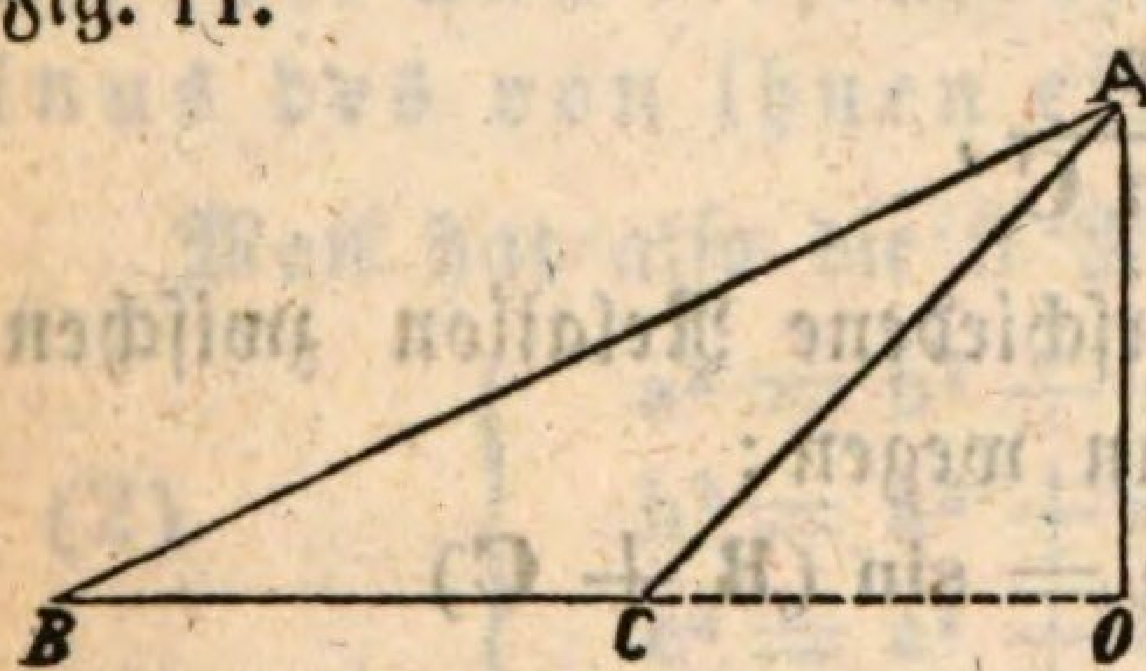
oder:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C};$$

d. h. in jedem geradlinigen Dreiecke verhalten sich die Seiten wie die Sinus der Gegenwinkel.

Wenn einer der beiden Winkel B, C, z. B. C, stumpf ist (Fig. 11), so fällt der Punkt O auf die Verlängerung von BC; aber da zwei Supplementarwinkel denselben Sinus haben; so geben die beiden Dreiecke ABO, ACO noch:

Fig. 11.



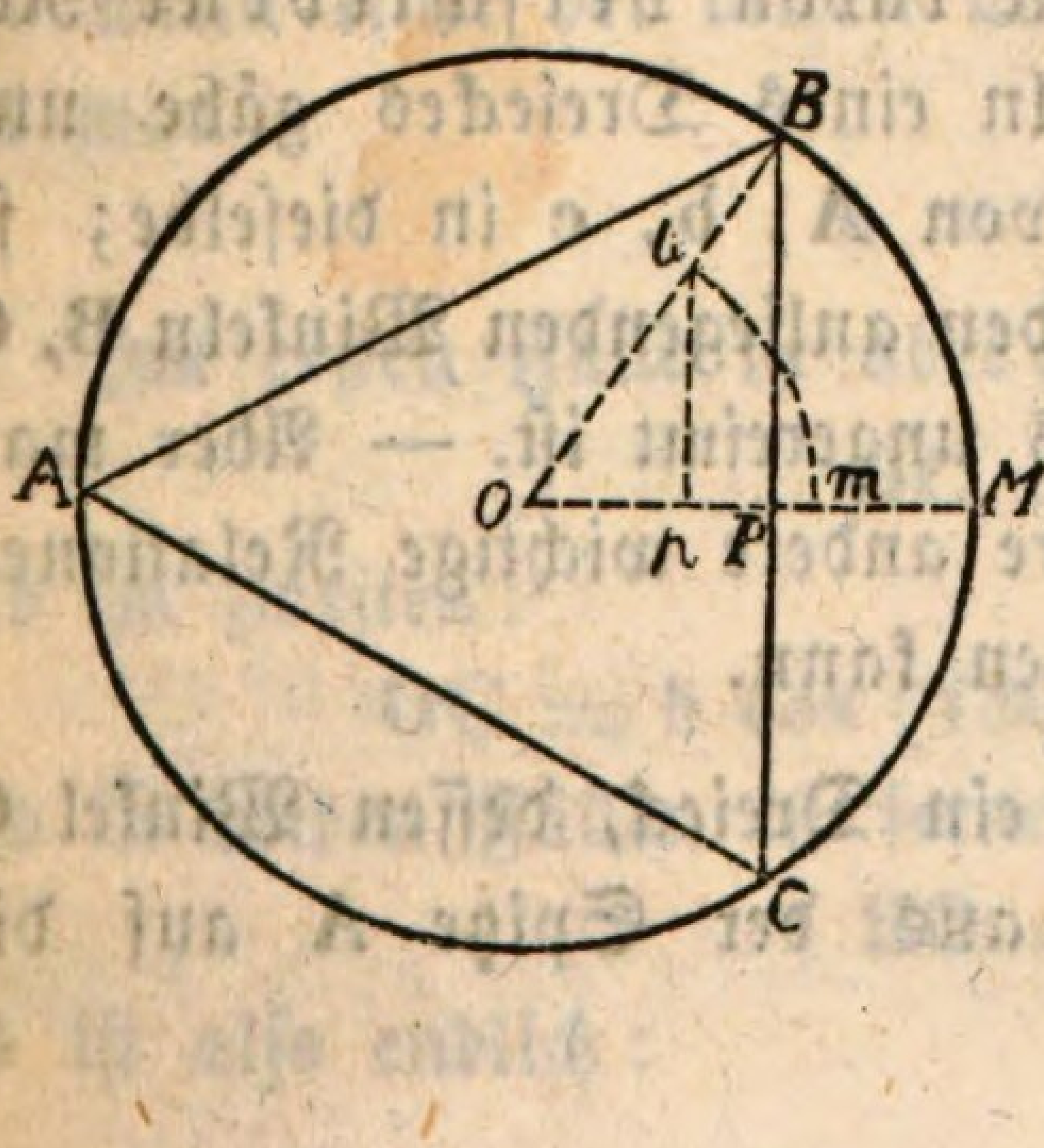
$$AO = c \sin B = b \sin C,$$

folglich:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

Man kann den letzten Satz auch wie folgt beweisen: Man beschreibe um das Dreieck ABC (Fig. 12ª) einen Kreis, ziehe den Halbmesser OB, fälle OPM senkrecht auf BC, beschreibe aus O als Mittelpunkt mit einem Halbmesser = 1 den Bogen bm und ziehe das Perpendikel bp auf OM; so ist der Winkel A = BOM, dessen Sinus bp ist; folglich:

Fig. 12ª.



$$\sin A = bp.$$

Aber die ähnlichen Dreiecke BOP, bOp geben:

$$\frac{bp}{1} = \frac{BP}{OB} = \frac{BC}{2\,OB},$$

und wenn R den Halbmesser des umschriebenen Kreises bezeichnet:

$$\sin A = \frac{a}{2\,R},$$

d. h. der Sinus eines Winkels eines Dreieckes ist gleich dem Verhältnisse der Gegenseite zu dem Durchmesser des umschriebenen Kreises. — Hieraus folgt:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B},$$

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C},$$

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

§. 100. Nach dem Vorhergehenden hat man zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreieckes die Relationen:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A + B + C = 180^\circ \\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}, \end{array} \right.$$

und es kann keine andere, davon verschiedene Relation zwischen diesen Seiten und Winkeln geben. Denn wegen:

$$\sin A = \sin (180 - B - C) = \sin (B + C)$$

folgt aus den Relationen (1):

$$A = 180^\circ - B - C.$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)},$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}.$$

Wenn es nun außer (1) noch eine davon verschiedene Relation zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreieckes gäbe und man setzte die vorhergehenden Werthe von A, b, c in dieselbe; so erhielte man zwischen der Seite a und den anliegenden Winkeln B, C eine nicht identische Gleichung, was ungereimt ist. — Aber man kann aus den Gleichungen (1) mehrere andere wichtige Relationen ableiten, welche man auch direkt erhalten kann.

§. 101. Es sei ABC (Fig. 10) ein Dreieck, dessen Winkel C spitz ist, und AO ein Perpendikel aus der Spitze A auf die Seite BC; so hat man:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \,.\, CO;$$

aber das rechtwinklige Dreieck ACO gibt:

$$CO = b \cos C,$$

und folglich ist:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Wenn der Winkel C (Fig. 11) stumpf ist, so hat man:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \,.\, CO;$$

aber das rechtwinklige Dreieck ACO gibt:

$$CO = b \cos ACO = b \cos (180^\circ - C) = - b \cos C,$$

und folglich ist wieder:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Wenn der Winkel $C = 90^\circ$ ist, folglich $\cos C = o$; so hat man:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

In jedem geradlinigen Dreiecke ist also das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden andern Seiten und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.

Man hat also die 3 Relationen:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \end{array} \right.$$

wo in jeder 3 Seiten und 1 Winkel vorkommen.

§. 102. Wenn die Winkel B, C des Dreieckes ABC (Fig. 10 und 11) spitz sind, und man zieht aus der Spitze A auf BC das Perpendikel AO, so ist:

$$a = BO + OC,$$

und wenn einer der beiden Winkel B, C, z. B. C, stumpf ist, so hat man:

$$a = BO - OC.$$

Im ersten Falle ist aber:

$$OC = b \cos C,$$

und im zweiten:

$$OC = b \cos (180^\circ - C) = - b \cos C,$$

und in beiden Fällen ist ferner:

$$BO = c \cos B.$$

Es ist also endlich:

und ebenso: (3) $\begin{cases} a = b \cos C + c \cos B, \\ b = c \cos A + a \cos C, \\ c = a \cos B + b \cos A. \end{cases}$

Die Gleichungen (3) lassen sich auch aus den Gleichungen (2) ableiten; denn addirt man z. B. die beiden ersten der Gleichungen (2), so erhält man:

$$c = a \cos B + b \cos A, \text{ u. s. f.}$$

Umgekehrt kann man auch die Gleichungen (2) aus (3) herleiten; denn multiplicirt man die Gleichungen (3) resp. mit a, b und — c, und addirt die Produkte; so erhält man:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2\, ab \cos C,$$

oder:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C, \text{ u. s. f.}$$

§. 103. Hieraus sieht man: daß die Gleichungen (2) und (3) gleichbedeutend sind, und wir wollen nun zeigen: wie man eins dieser beiden Systeme, z. B. (3), aus den Fundamentalgleichungen (1) ableiten kann. — Die erste der Gleichungen (1) gibt:

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

folglich:

$$\sin C = \sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos a \sin B,$$

und wenn man für:

$$\sin A, \sin B, \sin C$$

die denselben proportionalen Zahlen:

$$a, b, c$$

setzt; so kommt:

$$c = a \cos B + b \cos A, \text{ u. s. f.}$$

§. 104. Die Gleichungen (1) lassen sich auch aus (2) oder (3) herleiten, wenn man die Bedingung macht: daß $A + B + C$ nicht größer als 180° ist. — Denn aus der ersten der Gleichungen (2) folgt:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\, b\, c},$$

also:

$$1 - \cos^2 A = \sin^2 A = \frac{-a^2 - b^2 - c^2 + 2\, a^2 b^2 + 2\, a^2 c^2 + 2\, b^2 c^2}{4\, b^2 c^2},$$

und:

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{-a^2 - b^2 - c^2 + 2\, a^2 b^2 + 2\, a^2 c^2 + 2\, b^2 b^2}{4\, a^2 b^2 c^2}.$$

Da dieser Werth von $\frac{\sin^2 A}{a^2}$ in Beziehung auf a, b, c sym-

metrisch ist, also durch gegenseitige Vertauschung von a, b, c nicht geändert würde; so würde man für:

$$\frac{\sin^2 B}{b^2}, \frac{\sin^2 C}{c^2}$$

denselben Ausdruck, wie für $\frac{\sin^2 A}{a^2}$ erhalten. Wenn man also weiß: daß A, B, C kleiner als 180° sind, ihre Cosinus also positiv; so kann man setzen:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Ferner kann man auch a, b und c aus den Gleichungen (2) oder (3) eliminiren, weil sie homogen sind, und, wenn man will, nur die Verhältnisse zweier Seiten zu der dritten enthalten. — Setzt man z. B. $b = ax$, $c = ay$, so werden die Gleichungen (3):

$$y = x \cos A + \cos B,$$
$$x = y \cos A + \cos C,$$
$$1 = x \cos C + y \cos B,$$

und wenn man x, y eliminirt; so findet man:

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1.$$

Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke.

§. 105. Bei der Auflösung der rechtwinkligen Dreiecke kommen 4 verschiedene Fälle vor.

Erster Fall. — Wenn die Hypotenuse a und ein spitzer Winkel B gegeben ist, den Winkel C und die beiden Katheten b und c zu berechnen.

Der Winkel C ergibt sich unmittelbar:

$$C = 90° - B,$$

und außerdem ist:

$$b = a \sin B, \quad c = a \cos B,$$

woraus folgt:

$$\log b = \log a + \log \sin B,$$
$$\log c = \log a + \log \cos B.$$

Zweiter Fall. — Wenn die Hypotenuse a und eine Kathete b gegeben ist, die andere Kathete c und die beiden spitzen Winkel B, C zu berechnen.

Man hat:

$$b = a \sin B, \text{ also } \sin B = \frac{b}{a},$$

und:

$$\log \sin B = \log b - \log a = \log b + \text{dec. Erg.} \log a - 10.$$

Hierauf ist:

$$C = 90^0 - B,$$

und endlich bestimmt man c durch die Formel:

$$c = a \cos B,$$

oder:

$$\log c = \log a + \log B.$$

Dritter Fall. — Wenn eine Kathete b und ein spitzer Winkel gegeben ist, den zweiten spitzen Winkel und die beiden andern Seiten zu berechnen.

Der unbekannte Winkel ergibt sich unmittelbar aus der Relation:

$$B + C = 90^\circ,$$

und für die Hypotenuse a, so wie für die Kathete c hat man:

$$a = \frac{b}{\sin B}, \quad c = b \cot B,$$

oder:

$$\log a = \log b + \text{dec. Erg.} \log \sin B - 10,$$
$$\log c = \log b + \log \cot B.$$

Vierter Fall. — Wenn die beiden Katheten b und c gegeben sind, die Hypotenuse a und die beiden spitzen Winkel B, C zu berechnen.

Zur Bestimmung des Winkels B hat man:

$$\tan B = \frac{b}{c},$$

also:

$$\log \tan B = \log b + \text{dec. Erg.} \log c - 10,$$

und alsdann ist:

$$C = 90^\circ - B.$$

Für die Hypotenuse a hat man endlich:

$$a = \frac{b}{\sin B},$$

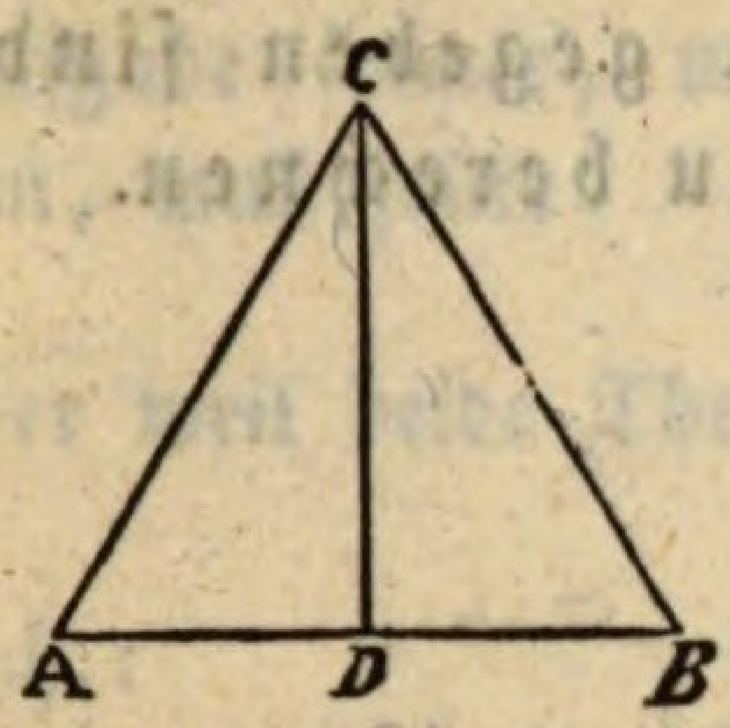
also:

$$\log a = \log b + \text{dec. Erg.} \log \sin B - 10.$$

Auflösung des gleichschenkligen Dreieckes.

§. 106. Auch hierbei kommen 4 Fälle vor, welche sich unmittelbar aus dem rechtwinkligen Dreiecke ergeben, weil das Per-

Fig. 12^b.



pendikel CD (Fig. 12^b) aus der Spitze C auf die Basis AB diesen Winkel und diese Seite halbirt.

Erster Fall. — Wenn der Schenkel a und der Winkel C gegeben ist, so hat man:

$$A = B = 90^\circ - \tfrac{1}{2} C,$$
$$c = 2 a \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Zweiter Fall. — Wenn der Schenkel a und der Winkel A gegeben ist, so hat man:

$$C = 180^\circ - 2 A,$$
$$c = 2 a \cos A.$$

Dritter Fall. — Wenn die Basis c und der Winkel C an der Spitze gegeben ist, so hat man:

$$A = B = 90^\circ - \tfrac{1}{2} C,$$
$$a = \frac{c}{2 \sin \tfrac{1}{2} C} = \tfrac{1}{2} c \, . \, \operatorname{cosec} \tfrac{1}{2} C.$$

Vierter Fall. — Wenn die Basis c und der Winkel A an derselben gegeben ist, so hat man:

$$C = 180^\circ - 2 A,$$
$$a = \frac{c}{2 \cos A} = \tfrac{1}{2} c \, . \, \sec A.$$

Auflösung beliebiger ebener Dreiecke.

§. 107. Die Auflösung beliebiger Dreiecke bietet 4 verschiedene Fälle dar.

Erster Fall. — Wenn eine Seite a und zwei Winkel gegeben sind, die beiden andern Seiten und den dritten Winkel zu berechnen.

Der gesuchte Winkel ergibt sich unmittelbar aus der Relation:

$$A + B + C = 180^\circ,$$

worauf man die Seiten b und c durch die Formeln:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

oder:

$$\log b = \log a + \log \sin B + \text{dec. Erg.} \log \sin A - 10,$$
$$\log c = \log a + \log \sin C + \text{dec. Erg.} \log \sin A - 10$$

findet.

Zweiter Fall. — Wenn zwei Seiten a, b und der der ersten gegenüberliegende Winkel A gegeben sind, die Winkel B, C und die dritte Seite c zu berechnen.

Zunächst hat man für den Winkel B:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

also:

$$\log \sin B = \log b + \log A + \text{dec. Erg.} \log a - 10,$$

hierauf:

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

und endlich für die Seite c:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

mithin:

$$\log c = \log a + \log \sin C + \text{dec. Erg.} \log \sin A - 10.$$

Untersuchung. — Nur wenn $a > b \sin A$ ist, geben die Tafeln für B einen Werth $M < 90^\circ$; aber man kann auch $B = 180^\circ - M$ nehmen, so daß man für C zwei entsprechende Werthe:

$$C = 180^\circ - A - M, \; C = M - A,$$

und folglich für c ebenfalls zwei entsprechende Werthe hat.

Soll der Winkel M der Aufgabe entsprechen, so ist erforderlich und hinreichend: daß $A + M < 180^\circ$ ist; und wenn der Winkel $180^\circ - M$ der Aufgabe entsprechen soll, so muß $M > A$ sein — und wir wollen nun untersuchen, in welchen Fällen diese Bedingungen erfüllt werden können.

1) Wenn $A \geqq 90^\circ$ ist, so ist der Werth $180^\circ - M$ von B unzulässig, und wenn der Werth M von B eine Auflösung bilden soll, so muß

$$M < 180^\circ - A$$

sein, oder da beide Theile dieser Ungleichheit kleiner als 90° sind:

$$\sin M < \sin (180^\circ - A)$$
$$< \sin A,$$

d. h.:

$$\frac{b \sin A}{a} < \sin A, \text{ oder } b < a.$$

Die Aufgabe gestattet also nur eine Auflösung, und die dazu erforderliche Bedingung ist: daß die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite die größte von den beiden gegebenen Seiten ist.

2) Wenn A $<$ 90° ist, so entspricht der Werth M von B der Aufgabe immer, um aber auch B = 180° — M nehmen zu können, muß sein:

$$M > A,$$

oder weil beide Theile dieser Ungleichheit kleiner als 90° sind:

$$\sin M > \sin A,$$

d. h.:

$$\frac{b \sin A}{a} > \sin A, \text{ oder } b > a.$$

In diesem Falle ist also die Bedingung der Möglichkeit:

$$a > b \sin A,$$

und wenn diese Bedingung erfüllt wird, so gestattet die Aufgabe eine, oder zwei Auflösungen, je nachdem die dem gegebenen Winkel gegenüberliegende Seite größer, oder kleiner als die andere gegebene Seite ist.

Die vorhergehenden Resultate stimmen mit den sich aus rein geometrischen Betrachtungen ergebenden überein.

§. 108. Bei der vorhergehenden Auflösung wird die Seite c erst berechnet, nachdem die Winkel B und C berechnet sind; aber wenn man diese Winkel gar nicht sucht, sondern nur die Seite c, so kann man sich der Formel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$$

bedienen, woraus folgt:

$$c = b \sin A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}.$$

Um diese Formel logarithmisch brauchbar zu machen, muß man nach der Methode in §. 73. einen Hülfswinkel anwenden; aber alsdann werden die erforderlichen Rechnungen ebenso weitläufig, als bei Anwendung der ersten Methode.

Das sich zunächst darbietende Mittel, den Ausdruck für c logarithmisch brauchbar zu machen, besteht darin: daß man setzt:

$$\frac{b \sin A}{a} = \sin \varphi, \text{ also } b = \frac{a \sin \varphi}{\sin A},$$

und alsdann wird der Werth von c:

$$c = \frac{a \sin \varphi \cos A}{\sin A} \pm a \cos \varphi = \frac{a \sin (\varphi \pm A)}{\sin A},$$

woraus man sieht: daß der angewandte Hülfswinkel φ kein anderer ist als der Winkel B des Dreieckes, so daß also die erste Auflösung keine Modifikation zuläßt.

§. 109. Dritter Fall. — Wenn zwei Seiten a, b und der zwischenliegende Winkel C gegeben sind, die

dritte Seite c und die beiden andern Winkel A, B zu berechnen.

Zunächst hat man:

$$A + B = 180^0 - C,$$

und:

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b},$$

woraus folgt:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a - b}{a + b};$$

aber nach §. 42. ist:

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A + B)};$$

folglich:

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A - B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A + B)} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Weiter ist:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A + B) = \cot \frac{1}{2} C,$$

also:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{1}{2} C,$$

woraus für $a > b$ folgt:

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} (A - B) = \log (a - b) + \text{dec. Erg.} \log (a + b) + \log \cot \frac{1}{2} C - 10.$$

Vermittelst dieser Formel berechnet man $\frac{1}{2}(A - B)$, und da $\frac{1}{2}(A + B) = 90^0 - \frac{1}{2} C$ ist; so hat man auch die Werthe von A und B.

Zur Bestimmung der Seite c kann man sich der Formel:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

oder:

$$\log c = \log a + \log \sin C + \text{dec. Erg.} \log \sin A - 10.$$

bedienen; aber alsdann hat man drei neue Logarithmen zu suchen, während man deren nur zwei zu suchen hat, wenn man auf folgende Weise verfährt. Man hat:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a + b}{\sin A + \sin B},$$

folglich:

$$c = \frac{(a + b) \sin C}{\sin A + \sin B}.$$

Nun ist aber nach §. 42.:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$$
$$= 2 \cos \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2}(A - B)$$

und:

$$\sin C = 2 \sin \tfrac{1}{2} C \cos \tfrac{1}{2} C;$$

folglich:

$$c = \frac{(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C}{\cos \tfrac{1}{2}(A - B)},$$

und:

$$\log c = \log(a + b) + \log \sin \tfrac{1}{2} C + \text{dec. Erg.} \log \cos \tfrac{1}{2}(A - B) - 10.$$

Will man die Seite c direkt berechnen, so bedient man sich der Formel:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C},$$

welche auf folgende Weise am einfachsten logarithmisch brauchbar gemacht wird. Man hat:

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} C + \sin^2 \tfrac{1}{2} C = 1$$
$$\cos^2 \tfrac{1}{2} C - \sin^2 \tfrac{1}{2} C = \cos C,$$

und man kann folglich setzen:

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2)(\cos^2 \tfrac{1}{2} C + \sin^2 \tfrac{1}{2} C) - 2\,ab(\cos^2 \tfrac{1}{2} C - \sin^2 \tfrac{1}{2} C)}$$
$$= \sqrt{(a - b)^2 \cos^2 \tfrac{1}{2} C + (a + b)^2 \sin^2 \tfrac{1}{2} C}.$$

Berechnet man nun den Hülfswinkel:

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{a - b}{a + b} \cot \tfrac{1}{2} C,$$

so ist:

$$c = \frac{(a + b) \sin \tfrac{1}{2} C}{\cos \varphi}.$$

Diese Formel ist logarithmisch brauchbar; aber man sieht: daß der Hülfswinkel φ, welchen man zuvor berechnen muß, nichts anders ist, als $\tfrac{1}{2}(A - B)$. Die Rechnungen, welche diese zweite Methode erfordert, sind also ganz dieselben, wie bei der ersten Methode — und wir haben jene auch blos zur Uebung mitgetheilt.

§. 110. Vierter Fall. — Wenn die drei Seiten a, b, c gegeben sind, die drei Winkel A, B, C zu berechnen.

Der Winkel A ergibt sich aus der Formel:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,ab \cos A,$$

nämlich:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}.$$

Diese Formel ist zwar nicht logarithmisch brauchbar, es lassen sich aber leicht logarithmisch brauchbare Formeln daraus herleiten,

vermittelst welcher man den Winkel A in allen Fällen leicht berechnen kann. — Nach §. 48. ist:

$$\cos^2 {}^1/_2 A = \frac{1 + \cos A}{2}, \quad \sin^2 {}^1/_2 A = \frac{1 - \cos A}{2},$$

und wenn man für cos A seinen obigen Werth setzt:

$$\cos^2 {}^1/_2 A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{4bc}$$

$$= \frac{(a + b + c)(-a + b + c)}{4bc},$$

$$\sin^2 {}^1/_2 A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}$$

$$= \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc}.$$

Setzt man nun zur Abkürzung:

$$a + b + c = 2p,$$

so ist:

$$a + b - c = 2(p - c),$$
$$a - b + c = 2(p - b),$$
$$-a + b + c = 2(p - a);$$

folglich:

$$\cos^2 {}^1/_2 A = \frac{p(p - a)}{bc}, \quad \sin^2 {}^1/_2 A = \frac{(p - b)(p - c)}{bc},$$

und:

(1) $$\sin {}^1/_2 A = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}},$$

(2) $$\cos {}^1/_2 A = \sqrt{\frac{p(p - a)}{bc}},$$

(3) $$\tang {}^1/_2 A = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}}.$$

In diesen Formeln ist die Wurzelgröße immer positiv zu nehmen, weil der Winkel ½ A spitz ist, und folglich seine trigonometrischen Linien positiv sind.

Durch bloße Vertauschung der Buchstaben erhält man daraus:

(4) $$\sin {}^1/_2 B = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{ac}},$$

(5) $$\cos {}^1/_2 B = \sqrt{\frac{p(p - b)}{ac}},$$

(6) $$\tang {}^1/_2 B = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{p(p - b)}},$$

$$(7) \qquad \sin {}^1/_2 C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

$$(8) \qquad \cos {}^1/_2 C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

$$(9) \qquad \tang {}^1/_2 C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

und alle diese Formeln sind logarithmisch brauchbar.

Wenn man nur einen Winkel, z. B. A, berechnen will, so kann man gleichgültig jede der Formeln (1), (2), (3) anwenden; aber wenn man alle drei Winkel A, B, C zu berechnen hat, so verdienen die Formeln (3), (6) und (9) den Vorzug, weil man nur vier Logarithmen zu nehmen braucht, während man bei Anwendung der Formeln (1), (2), (4), (5), (7) und (8) sieben Logarithmen aufsuchen muß.

Wenn der Werth von tang $^1/_2$ A reell, so wie der sin $^1/_2$ A und cos $^1/_2$ A reell und kleiner als 1 sein soll; so muß das Dreieck aus den drei gegebenen Seiten a, b, c möglich sein, d. h. es muß die Summe je zweier Seiten größer, und ihre Differenz kleiner sein, als die dritte Seite. — Diese Bedingungen lassen sich auch aus den obigen Formeln herleiten.

1) Soll nämlich der Werth von cos $^1/_2$ A reell sein, so muß $p > a$ oder $b + c > a$ sein — und damit derselbe Werth < 1 sei, muß $p(p - a) < bc$, d. h. $(b + c)^2 - a^2 < 4\,bc$ oder $(b - c)^2 < a^2$, also $b - c < a$ sein.

2) Soll der Werth von sin $^1/_2$ A reell sein, so müssen die Faktoren $p - b$, $p - c$ einerlei Zeichen haben; sie können aber nicht negativ sein, weil ihre Summe $= a$ ist; folglich muß $p > b$, $p > c$, d. h. $b < a + c$ und $c < a + b$ sein.

3) Soll der Werth von tang $^1/_2$ A reell sein, so müssen die Faktoren $p - a$, $p - b$, $p - c$ alle drei positiv, oder zwei davon negativ sein, und da dieser letzte Fall nicht stattfinden kann; so kommt man wieder auf die Bedingung: daß jede Seite kleiner sein muß, als die Summe der beiden andern.

Fläche des Dreieckes.

§. 111. Die Fläche eines Dreieckes kann man berechnen, wenn man 3 seiner 6 Elemente kennt, wofern sich wenigstens 1 Seite

darunter befindet — und wir wollen die hier möglichen 4 Fälle nacheinander betrachten.

1) Wenn zwei Seiten a, b und der zwischen ihnen liegende Winkel C gegeben sind.

Es sei OA (Fig. 10 und 11) die Höhe des Dreieckes und F bezeichne seine Fläche, so ist:

$$F = \frac{1}{2} a \,.\, \overline{AO}.$$

Aber das rechtwinklige Dreieck AOC gibt:

$$AO = b \sin C,$$

und folglich ist:

$$F = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Die Fläche eines Dreieckes wird also durch die Hälfte des Produktes aus zwei Seiten und dem Sinus des zwischen ihnen liegenden Winkels ausgedrückt.

2) Wenn zwei Seiten a, b und der einer derselben gegenüberliegende Winkel A gegeben ist.

Man berechnet zuerst den Winkel C (§. 107.) und bedient sich dann der letzten Formel.

3) Wenn eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel C, B gegeben sind.

In diesem Falle hat man:

$$F = \frac{1}{2} ab \sin C, \; b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)};$$

folglich:

$$F = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin (B + C)} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

4) Wenn die drei Seiten a, b, c gegeben sind.

Nach §. 110. hat man:

$$\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

$$\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}};$$

folglich:

$$\sin C = 2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C = 2 \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab},$$

und wenn man diesen Werth von sin C in:

$$F = \frac{1}{2} ab \sin C$$

substituirt:

$$F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

wo $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist.

Aus dem Vorhergehenden ergeben sich auch die folgenden bemerkenswerthen Formeln sehr leicht:

$$\sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B \sin \tfrac{1}{2} C = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{F^2}{p\,abc},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C = p\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc} = \frac{pF}{abc},$$

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2} A \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2} B \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2} C = \frac{F}{p^2}.$$

Halbmesser des umschriebenen Kreises.

§. 112. Wenn R den Halbmesser des umschriebenen Kreises bedeutet, so ist nach §. 99.:

$$R = \frac{a}{2 \sin A},$$

folglich:

$$R = \frac{abc}{2bc \sin A} = \frac{abc}{4F}$$

$$= \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Halbmesser des eingeschriebenen Kreises.

§. 113. Wenn r den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises bezeichnet, und man verbindet den Mittelpunkt dieses Kreises mit den drei Winkelspitzen des Dreieckes, so wird dasselbe in 3 Dreiecke zerlegt, deren gemeinschaftliche Höhe = r ist, und deren Grundlinien die Seiten a, b, c sind. Es ist folglich:

$$F = \frac{a + b + c}{2} \cdot r$$

oder:

$$F = pr \text{ und } r = \frac{F}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Wenn α, β, γ die Halbmesser der Kreise bezeichnen, welche resp. eine der Seiten a, b, c und die Verlängerungen der beiden andern berühren; so ist offenbar:

$$F = (p-a)\,\alpha = (p-b)\,\beta = (p-c)\,\gamma,$$

woraus folgt:

$$\alpha = \frac{F}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

$$\beta = \frac{F}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},$$

$$\gamma = \frac{F}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}},$$

wofür man auch schreiben kann (§. 110.):

$$\alpha = p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A,$$

$$\beta = p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B,$$

$$\gamma = p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C.$$

Alle diese Formeln sind logarithmisch brauchbar, und es lassen sich daraus eine Menge anderer ableiten, wovon wir blos noch die drei folgenden anführen wollen:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma},$$

$$F = \sqrt{r\alpha\beta\gamma},$$

$$4R = \alpha + \beta + \gamma - r.$$

Auflösung ebener Dreiecke, wenn die gegebenen Größen nicht alle blos Seiten oder Winkel sind.

§. 113ᵃ. Da die Anzahl der Aufgaben, welche sich hier stellen lassen, sehr groß ist, so sollen hier nur einige merkwürdige Fälle betrachtet werden.

1) Ein Dreieck aufzulösen, wenn eine Seite a, der Gegenwinkel A und die Summe, oder Differenz $b \pm c$ der beiden andern Seiten b, c gegeben sind.

Zunächst hat man:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}(B+C) \cos \tfrac{1}{2}(B-C)}{2 \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A} = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(B-C)}{\sin \tfrac{1}{2} A},$$

woraus sich $\tfrac{1}{2}(B-C)$ ergibt, und da $B+C$ bekannt ist, so ergibt sich auch B und C, worauf man alsdann erhält:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \text{ und } c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Wenn die Differenz $b - c$ gegeben ist, so hat man:

$$\frac{b-c}{a} = \frac{\sin B - \sin C}{\sin A} = \frac{2 \sin \tfrac{1}{2}(B-C) \cos \tfrac{1}{2}(B+C)}{2 \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A} = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(B-C)}{\cos \tfrac{1}{2} A},$$

woraus sich $\tfrac{1}{2}(B-C)$ ergibt, und die übrigen Stücke ergeben sich wie vorhin.

2) Ein Dreieck aufzulösen, wenn eine Seite a, ein anliegender Winkel B und die Summe, oder Differenz $b \pm c$ der beiden andern Seiten b, c gegeben sind.

Setzt man $a + b + c = 2p$, so ist p und $p - a$ bekannt, und man hat (§. 110.):

$$\text{tang}\, {}^1\!/_2 B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\ \text{tang}\, {}^1\!/_2 C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

folglich:

$$\text{tang}\, {}^1\!/_2 C \,.\, \text{tang}\, {}^1\!/_2 B = \frac{p-a}{p},$$

woraus sich C ergibt. Man kennt also A, B, C und a, so daß man hat:

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A},\ c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Wenn $b - c$ gegeben ist, und man setzt wieder $a + b + c = 2p$, so ist $p - b$ und $p - c$ bekannt, und man hat:

$$\frac{\text{tang}\, {}^1\!/_2 C}{\text{tang}\, {}^1\!/_2 B} = \frac{p-b}{p-c},$$

woraus sich C ergibt, u. s. w.

3) Ein Dreieck aufzulösen, wenn die Summe $a + b = s$ zweier Seiten a, b, die dritte Seite c und der Winkel A gegeben sind.

Es ist:

$$\text{tang}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)},$$

also:

$$\frac{p-a}{p-b} = \frac{p-c}{p\ \text{tang}^2 \frac{A}{2}},$$

und:

$$\text{tang}^2 \frac{B}{2} = \frac{p-c}{p} \cdot \frac{p-a}{p-b} = \left(\frac{p-c}{p\ \text{tang} \frac{A}{2}}\right)^2,$$

mithin:

$$\text{tang} \frac{B}{2} = \frac{p-c}{p\ \text{tang} \frac{A}{2}}.$$

Wegen:

$$\frac{p-c}{p} = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{s-c}{s+c}$$

ist also endlich:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{s-c}{(s+c)\tan\frac{A}{2}}.$$

Ferner hat man:

$$\tan\frac{C}{2} = \tan\left(90^0 - {}^1/_2\,(A+B)\right) = \cot{}^1/_2\,(A+B),$$

worauf sich a und b leicht ergeben. — Auch sieht man leicht ein, wie man den Fall zu behandeln hat, wo statt der Summe $a+b$ die Differenz $a-b$ gegeben ist.

4) Ein Dreieck aufzulösen, wenn die Summe $a+b=s$ zweier Seiten a, b und die Gegenwinkel A, B gegeben sind.

Nach §. 109. hat man:

$$a - b = \frac{(a+b)\tan{}^1/_2\,(A-B)}{\tan{}^1/_2\,(A+B)} \text{ und } a+b=s;$$

folglich:

$$a = \frac{s}{2}\left(1 + \frac{\tan{}^1/_2\,(A-B)}{\tan{}^1/_2\,(A+B)}\right)$$

$$= \frac{s}{2\tan{}^1/_2\,(A+B)}\left[\tan{}^1/_2\,(A+B) + \tan{}^1/_2\,(A-B)\right]$$

$$= \frac{s\,.\,\sin A}{2\sin{}^1/_2\,(A+B)\cos{}^1/_2\,(A-B)}$$

und ebenso:

$$b = \frac{s\,.\,\sin B}{2\sin{}^1/_2\,(A+B)\cos{}^1/_2\,(A-B)}.$$

Der Winkel C und die Gegenseite c findet man nun leicht.

5) Ein Dreieck aufzulösen, wenn seine Fläche F und seine Winkel A, B, C gegeben sind.

Nach §. 111. hat man:

$$F = {}^1/_2\,a^2\,\frac{\sin B\,.\,\sin C}{\sin A},$$

woraus folgt:

$$a = \sqrt{\frac{2F\sin A}{\sin B\sin C}},$$

und zwei ähnliche Ausdrücke hat man für b, c.

6) Ein Dreieck aufzulösen, wenn man seinen Umfang 2 p und seine Winkel A, B, C kennt.

Nach §. 111. hat man:

$$\frac{pF}{abc} = \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C,$$

woraus folgt, wenn man für F seinen Werth $\frac{1}{2}$ bc sin A oder bc sin $\frac{1}{2}$ A cos $\frac{1}{2}$ A setzt:

$$a = \frac{p \sin \tfrac{1}{2} A}{\cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C},$$

und ähnliche Ausdrücke erhält man für b, c.

7) Ein Dreieck aufzulösen, wenn man den Halbmesser r des in dasselbe beschriebenen Kreises und die Winkel A, B, C desselben kennt.

Aus den früher abgeleiteten Formeln ergibt sich leicht:

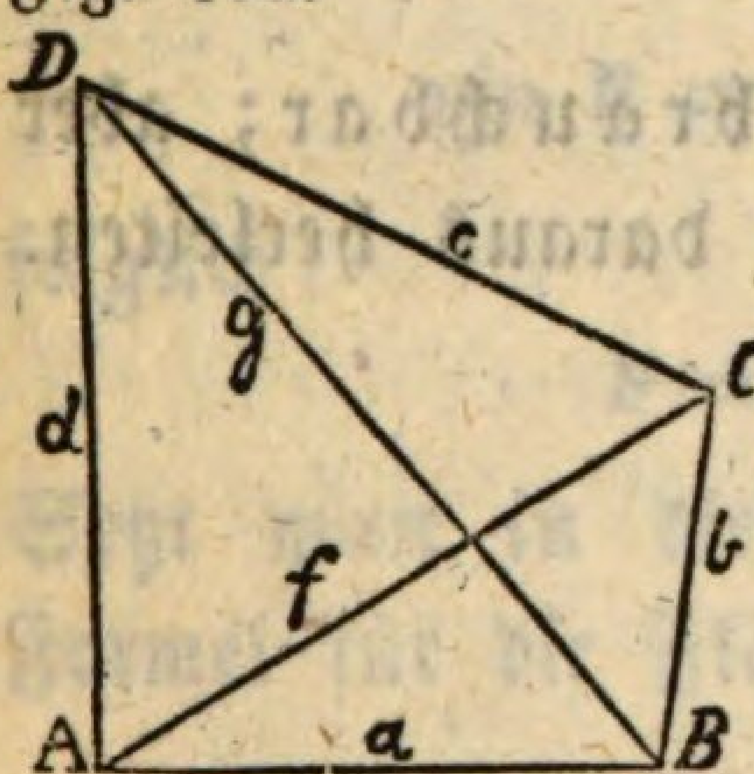
$$p - a = r \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} A,\ p - b = r \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} B,\ p - c = r \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} C,$$

und aus diesen 3 Gleichungen ergeben sich wegen $a + b + c = 2p$ leicht die 3 Unbekannten.

Auflösung des Viereckes.

§. 114. Es sei ABCD (Fig. 13ª) ein beliebiges Viereck, AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, CA = f, BD = g; so gibt das Dreieck ABC:

Fig. 13a.



$$f^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos B,$$

das Dreieck BCD:

$$g^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos C,$$

das Dreieck CDA:

$$f^2 = c^2 + d^2 - 2\,cd \cos D$$

und das Dreieck DAB:

$$g^2 = d^2 + a^2 - 2\,ad \cos A,$$

und außerdem ist:

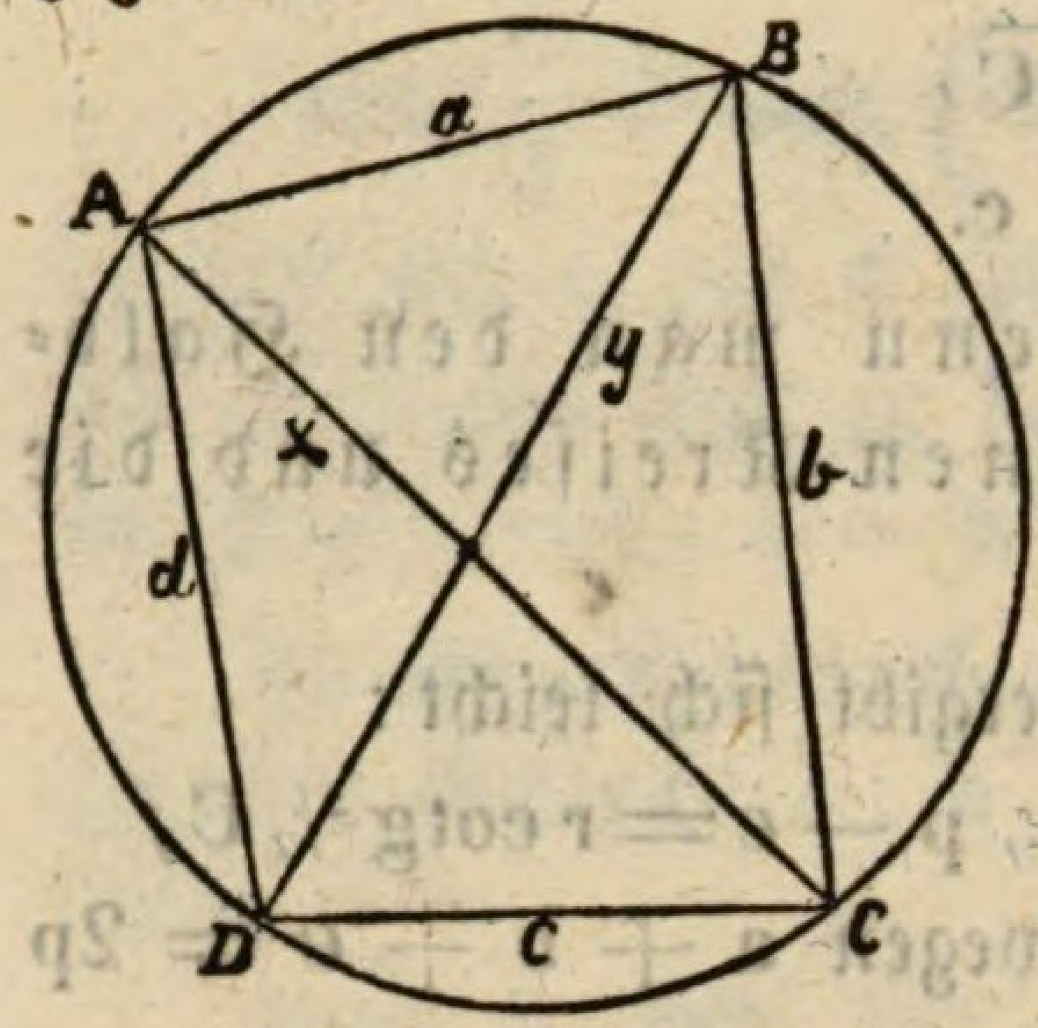
$$A + B + C + D = 360^0.$$

Da diese 5 Gleichungen 10 Größen enthalten, und zur Bestimmung des Viereckes nur 5 dieser Größen erforderlich sind; so folgt: daß die andern 5 aus den obigen 5 Gleichungen müssen gefunden werden können. Wir wollen uns jedoch bei der Auflösung der hierbei möglichen Fälle nicht weiter aufhalten, weil dies zu weitläufig sein würde und die Formeln sich nicht sehr elegant und symmetrisch herausstellen und später für die Auflösung eines beliebigen Vieleckes allgemeine symmetrische Formeln abgeleitet werden, welche leicht auf ein beliebiges Viereck angewandt werden können.

Wir gehen deshalb sofort zur Betrachtung des eingeschriebenen Viereckes über, bei welchem die Rechnungen einfacher und eleganter werden.

§. 115. Es sei ABCD (Fig. 13ᵇ) ein in den Kreis beschriebenes Viereck, AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = x, BD = y, F die Fläche des Viereckes und R der Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises. Da die Winkel B und D Supplementarwinkel sind, so sind ihre Cosinus gleich und von entgegengesetztem Zeichen, und die Dreiecke ABC, ACD geben:

Fig. 13ᵇ.



$$(1)\quad \begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos B, \\ x^2 = c^2 + d^2 + 2\,cd\cos B. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Elimination von x:

$$(2)\qquad \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)}.$$

Diese Formel ist zwar nicht logarithmisch brauchbar; aber es lassen sich leicht logarithmisch brauchbare Formeln daraus herleiten.

Es ist nämlich:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 - \cos B}{2},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{1 + \cos B}{2},$$

und wenn man hierin für cos B seinen Werth (2) setzt:

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{4\,(ab + cd)}$$

$$= \frac{(-a + b + c + d)\,(a - b + c + d)}{4\,(ab + cd)},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{(a + b)^2 - (c - d)^2}{4\,(ab + cd)}$$

$$= \frac{(a + b - c + d)\,(a + b + c - d)}{4\,(ab + cd)}.$$

Setzt man:

$$a + b + c + d = 2\,p,$$

so ist:

$$a + b + c - d = 2\,(p - d)$$

2c. 2c.

folglich erhält man:

$$(3)\quad \begin{cases} \sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}}, \\ \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\dfrac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}, \end{cases}$$

und wenn man diese Gleichheiten in einander dividirt:

$$(4)\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}}.$$

Ebenso ergibt sich für den Winkel A:

$$(5)\quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}},$$

und nachdem die Winkel des Viereckes gefunden sind, ergeben sich die Diagonalen nach §. 109. Da die Fläche des Viereckes der Summe der Flächen der Dreiecke ABC, ADC gleich ist, so hat man (§. 111.):

$$F = \tfrac{1}{2}(ab + cd) \sin B,$$

und wenn man die Gleichheiten (3) in einander multiplicirt:

$$\sin B = 2 \,.\, \frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd};$$

folglich:

$$F = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Setzt man in dieser Formel $d = o$, so erhält man die frühere Formel für die Fläche des Dreieckes wieder.

Will man die Diagonalen x und y direkt berechnen, so setze man in eine der Gleichungen (1) den aus (2) genommenen Werth von cos B; alsdann kommt:

$$x^2 = \frac{cd\,(a^2 + b^2) + ab\,(c^2 + d^2)}{ab + cd}$$

oder:

$$(6)\quad x^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd},$$

und ebenso:

$$(7)\quad y^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc};$$

aber diese Formeln sind nicht logarithmisch brauchbar.

Durch Multiplikation und Division von (6) und (7) ergibt sich:

$$(8)\quad xy = ac + bd,\ \frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

wodurch zwei bekannte Lehrsätze der Geometrie ausgedrückt werden. —

Ferner ist (§. 99.):

$$R = \frac{x}{2 \sin B},$$

also:

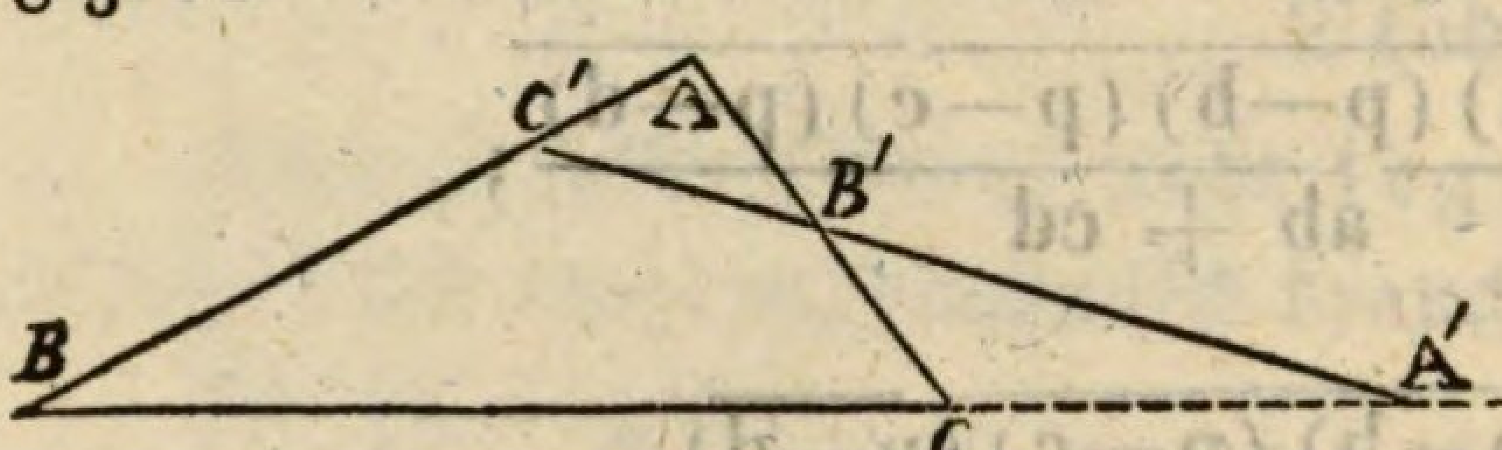
$$R = \frac{\sqrt{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}}{4\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}.$$

Gebrauch der Kreisfunktionen in der Geometrie.

§. 116. Die Anwendung der Kreisfunktionen beschränkt sich nicht blos auf numerische Berechnungen, sondern man kann sie auch bei dem Beweisen geometrischer Lehrsätze, und selbst bei der Auflösung graphischer Aufgaben mit Erfolg anwenden.

Soll man z. B. den geometrischen Satz beweisen: daß jede Transversale A′ B′ C′ (Fig. 14) auf den Seiten eines Dreieckes ABC sechs Abschnitte bestimmt, welche so beschaffen sind: daß das Produkt aus je drei nicht zusammenstoßenden dem Produkte der drei andern gleich ist; so hat man in den Dreiecken AB′C′, BC′A′, CA′B′, wenn man bemerkt: daß zwei Supplementarwinkel einerlei Sinus haben:

Fig. 14.



$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{\sin AB'C'}{\sin AC'B'},$$

$$\frac{BA'}{BC'} = \frac{\sin AC'B'}{\sin BA'C'},$$

$$\frac{CB'}{CA'} = \frac{\sin BA'C'}{\sin AB'C'};$$

folglich:

$$\frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{BA'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{CA'} = 1,$$

oder:

$$AC' \,.\, BA' \,.\, CB' = AB' \,.\, BC' \,.\, CA',$$

was bewiesen werden sollte.

§. 117. Wenn das Dreieck ABC (Fig. 10) in A rechtwinklig und AO senkrecht auf BC ist, so hat man bekanntlich:

$$(n) \qquad \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BO}{CO},$$

welche Proportion auch noch stattfindet, wenn A nicht $= 90^0$; aber $AB = AC$ ist. Man soll beweisen: daß diese beiden Fälle die einzigen sind, in welchen die Proportion (n) stattfindet.

Wegen:

$$BO = c \cos B\,, \; CD = b \cos C$$

wird die Proportion (n):

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{c \,.\, \cos B}{b \,.\, \cos C}, \text{ oder } \frac{c}{b} = \frac{\cos B}{\cos C};$$

Nun ist aber:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B},$$

folglich:

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\cos B}{\cos C},$$

oder:

$$\sin C \cos C = \sin B \cos B\,,$$

also auch:

$$\sin 2\,C = \sin 2\,B.$$

Die Winkel 2 B, 2 C haben also denselben Sinus, und da ihre Summe $< 360^0$ ist; so sind sie einander gleich, oder der eine ist das Supplement des andern, so daß:

$$B = C\,, \text{ oder } B + C = 90^0.$$

Im ersten Falle ist aber das Dreieck gleichschenklig und im zweiten rechtwinklig. W. b. w. s.

Zahlenbeispiele.

Beispiel 1. In dem rechtwinkligen Dreiecke ABC (Fig. 8) ist gegeben:

$$B = 67^0\, 22'\, 48'', 48,\; a = 589^m, 251\,,$$

und man soll C, b und c berechnen.

Zunächst ist:

$$C = 90^0 - B$$

$a = a \sin B.$	$c = a \cos B.$
$\log b = 2{,}7703003$	$\log a = 2{,}7703003$
$\log \sin B = 9{,}9652375$	$\log \cos B = 9{,}5850267$
$\log b = 2{,}7355378$	$\log c = 2{,}3553270$
$b = 543^m{,}924$	$c = 226^m{,}635.$

Beispiel 2. In dem Dreiecke ABC (Fig. 10) ist gegeben:

$$A = 81^0\,47'\,12'',5,\quad B = 38^0\,12'\,47'',5,\quad a = 701^m,224$$

und man soll berechnen: C, b und c.

Zunächst ist:

$$C = 180^0 - A - B = 60^0$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}.$$

log a = 2,8458568
d. C. log sin A = 0,0044774
log sin B = 9,7914024

log b = 2,6417366
$b = 438^m,\ 265.$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

log a = 2,8458568
d. C. log sin A = 0,0044774
log sin C = 9,9375306

log c = 2,7878648
$c = 613^m,\ 571.$

Beispiel 3. In dem Dreiecke ABC (Fig. 10) ist gegeben:

$$A = 27^0\,47'\,44'',77;\quad a = 219^m,912;\quad b = 251^m,328$$

und man soll berechnen: B, C und c.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

log B = 2,4002409
d. C. log a = 7,6577510
log sin A = 9,6686853

log sin B = 9,7266772.

Es gibt 2 Auflösungen:

$$B = 32^0\,12'\,15'',21 \text{ und } B = 147^0\,47'\,44'',79.$$

Erste Auflösung

$B = 32^0\,12'\,15'',21$

$C = 180^0 - A - B$
$= 120^0\,0'\,0'',02$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

log a = 2,3422490
log sin C = 9,9375313
d. C. log sin A = 0,3313147

log c = 2,6110950
$c = 408^m,\ 408.$

Zweite Auflösung

$B = 147^0\,47'\,44'',79$

$C = 180^0 - A - B$
$= 4^0\,24'\,30'',44$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

log a = 2,3422490
log sin C = 8,8857352
d. C. log sin A = 3,3313147

log c = 1,5592989
$c = 36^m,\ 2492.$

Beispiel 4. In demselben Dreiecke ist gegeben:

$$a = 424^m,096;\quad b = 371^m,084;\quad C = 21^0\,47'\,12'',5$$

und man soll berechnen: A, B und c.

$$\text{tang}\ {}^1\!/_2\,(A - B) = \frac{a - b}{a + b}\,\cot\ {}^1\!/_2\,C.$$

$a - b = 53{,}012$	$\log(a - b) = 1{,}7243742$
$a + b = 795{,}180$	d. E. $\log(a + b) = 7{,}0995346$
${}^1\!/_2\,C = 10^0\,53'\,36'',25$	$\log\cot\ {}^1\!/_2\,C = 0{,}7156816$
	$\log\text{tang}\ {}^1\!/_2\,(A - B) = 9{,}5395904$
	${}^1\!/_2\,(A - B) = 19^0\,6,\,23'',75$

$${}^1\!/_2\,(A + B) = 79^0\,6'\,23'',75$$
$${}^1\!/_2\,(A - B) = 19^0\,6'\,23'',75$$
$$A = 98^0\,12'\,47'',5$$
$$B = 60^0.$$

$$c = \frac{(a + b)\sin\ {}^1\!/_2\,C}{\cos\ {}^1\!/_2\,(A - B)}.$$

$$\log(a + b) = 2{,}9004654$$
$$\log\sin\ {}^1\!/_2\,C = 9{,}2764213$$
d. E. $\cos\ {}^1\!/_2\,(A - B) = 0{,}0246099$

$$\log c = 2{,}2014966$$
$$c = 159^m,036.$$

Beispiel 5. In demselben Dreiecke ist gegeben:

$$a = 608^m,775;\quad b = 1363^m,656;\quad c = 499^m,689,$$

und man soll die Winkel A, B, C und die Fläche F berechnen.

$p = \frac{a + b + c}{2} = 1461{,}060$	$\log p = 3{,}1646683$
$p - a = 852{,}285$	$\log(p - a) = 2{,}9305849$
$p - b = 97{,}404$	$\log(p - b) = 1{,}9885768$
$p - c = 511{,}371$	$\log(p - c) = 2{,}7087361$

$$\text{tang}\ {}^1\!/_2\, A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p\,(p-a)}}$$

½ log (p—b)	=	0,9942884
½ log (p—c)	=	1,3543680
d. E. ½ log (p—a)	=	8,5347076
d. E. ½ log p	=	8,4176659
log tang ½ A	=	9,3010299

½ A = 11° 18′ 35″, 75

A = 22° 37′ 11″, 50.

$$\text{tang}\ {}^1\!/_2\, B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p\,(p-b)}}.$$

½ log (p—a)	=	1,4652924
½ log (p—c)	=	1,3543680
d. E. ½ log (p—b)	=	9,0057116
d. E. ½ log p	=	8,4176659
log tang ½ B	=	0,2430379

½ B = 60° 15′ 18, 40

B = 120° 30′ 36″ 80.

$$\text{tang}\ {}^1\!/_2\, C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p\,(p-c)}}$$

½ log (p—a)	=	1,4652924
½ log (p—b)	=	0,9942884
d. E. ½ log (p—c)	=	8,6456319
d. E. ½ log p	=	8,4176659
log tang ½ C	=	9,5228786

½ C = 18° 26′ 5″, 85

C = 36° 52′ 11″, 70

$$F = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

½ log p	=	1,5823341
½ log (p—a)	=	1,4652924
½ log (p—b)	=	0,9942884
½ log (p—c)	=	1,3543680
log F	=	5,3962829

F = 249047,9 Quadratmeter

Probe: $A + B + C = 180^0$.

Berechnung beliebiger Vielecke.

§. 118. Es sei $A_1\ A_2\ A_3\ \ldots\ A_n$ (Fig. 15) eine beliebige Polygonallinie, deren Winkel mit A_1, A_2, A_3, ... und deren

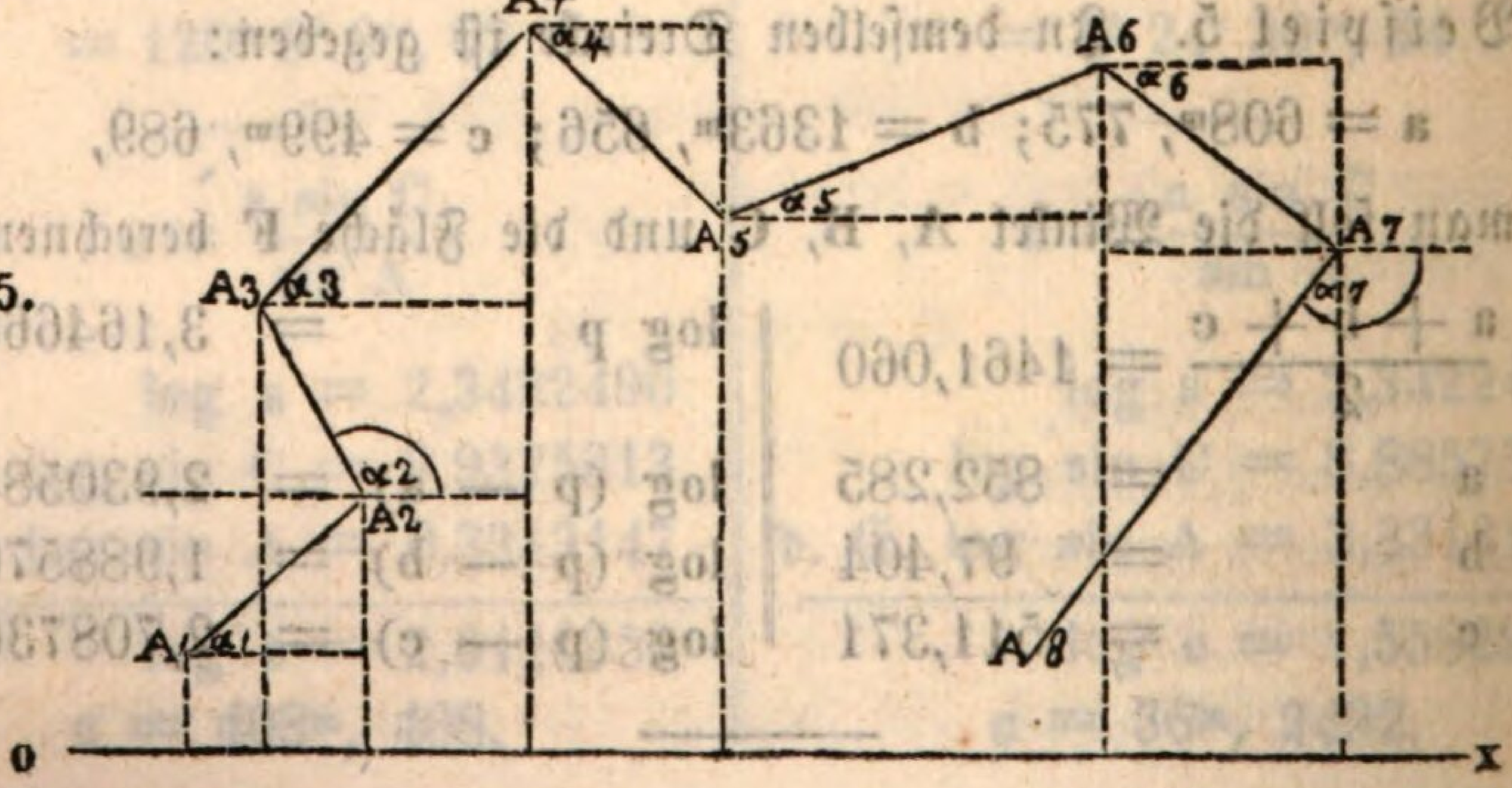


Fig. 15.

Seiten mit a_1, a_2, a_3, . . . bezeichnet werden mögen; so hat man für die Coordinaten x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3, . . . x_n, y_n, ihrer Eckpunkte A_1, A_2, A_3, . . . A_n in Beziehung auf eine beliebige Abscissenaxe OX und den Anfangspunkt O offenbar folgende Ausdrücke:

$x_1 = x_1$, $y_1 = y_1$;

$x_2 = x_1 + a_1 \cos \alpha_1$; $y_2 = y_1 + a_1 \sin \alpha_1$;

$x_3 = x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2$, $y_3 = y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2$;

. . . .

$$\left.\begin{array}{l} x_n = x_1 + a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 + a_3 \cos \alpha_3 + \ldots + a_{n-1} \cos \alpha_{n-1}, \\ y_n = y_1 + a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 + a_3 \sin \alpha_3 + \ldots + a_{n-1} \sin \alpha_{n-1}, \end{array}\right\} (1)$$

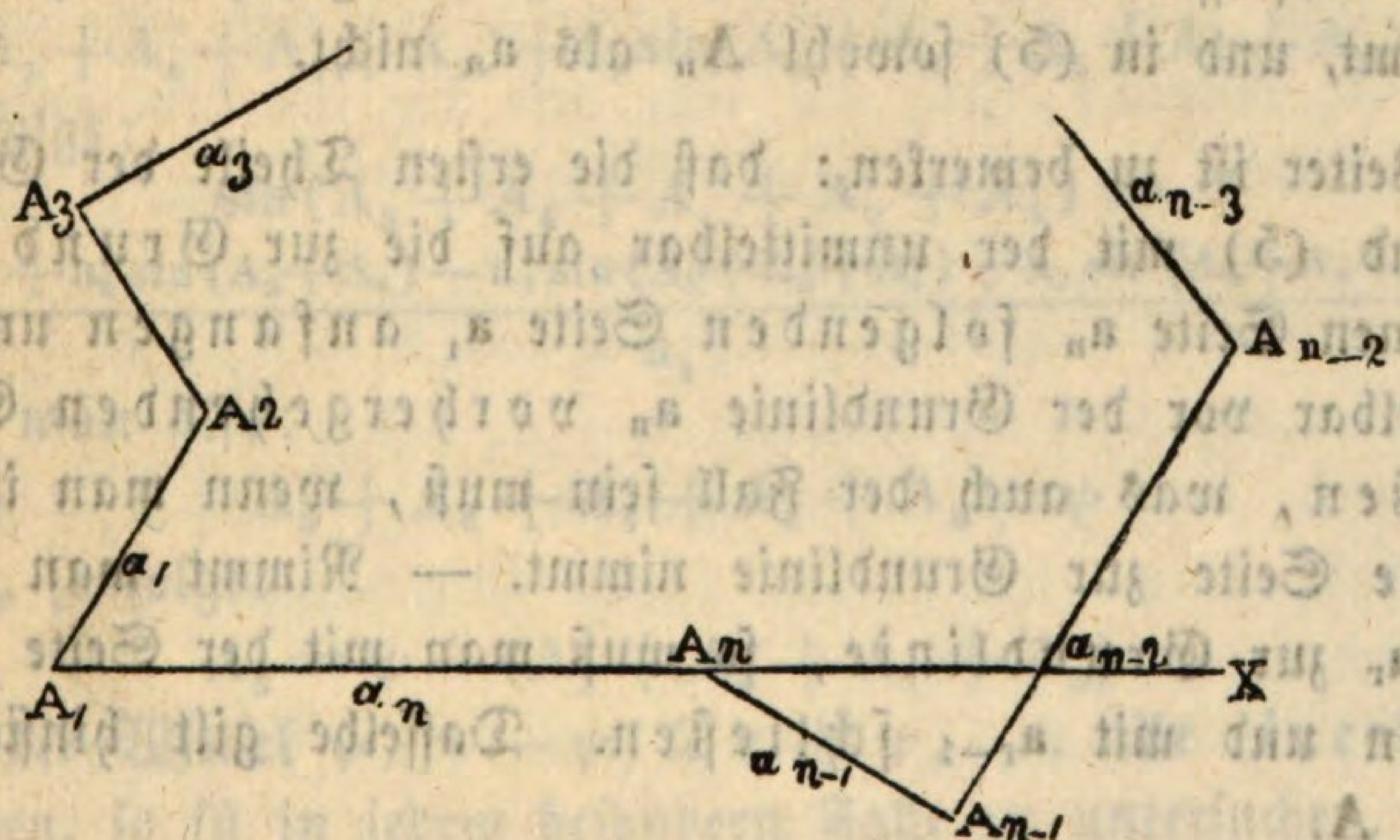
wo α_1, α_2, α_3, . . . α_n die positiven, oder negativen Neigungswinkel der Seiten a_1, a_2, a_3, . . . a_n gegen die Abscissenaxe OX bezeichnen.

Ferner ergeben sich zwischen den Winkeln A_1, A_2, A_3, . . . A_n und α_1, α_2, α_3, . . . α_n sehr leicht folgende Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 = A_2 + \alpha_1 - \pi, \\ \alpha_3 = A_3 + \alpha_2 - \pi, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_n = A_{n-1} + \alpha_{n-1} - \pi. \end{array}\right\} (2)$$

Betrachten wir nun ein geschlossenes Vieleck $A_1\ A_2\ A_3 \ldots A_n$ (Fig. 16) und nehmen die Seite $A_1\ A_n = a_n$ zur Abscissenaxe

Fig. 16.



und den Eckpunkt A_1 zum Anfangspunkte; so ist $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; $x_n = a_n$, $y_n = 0$ und $\sphericalangle\ \alpha_1 = \sphericalangle\ A_1$.

Die Relationen (1) werden demnach:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + a_3 \cos\alpha_3 + \ldots + a_{n-1} \cos\alpha_{n-1} = a_n. \\ a_1 \sin\alpha_1 + a_2 \sin\alpha_2 + a_3 \sin\alpha_3 + \ldots + a_{n-1} \sin\alpha_{n-1} = o. \end{array}\right\} (3)$$

Wegen $\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle A_1$ folgt ferner aus den Relationen (2):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 = A_1 + A_2 - \pi, \\ \alpha_3 = A_1 + A_2 + A_3 - 2 . \pi, \\ \alpha_4 = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - 3 . \pi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots + A_n - (n-1)\pi, \end{array}\right\} (2')$$

und wenn man diese Werthe für $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in (3) setzt; so erhält man die beiden Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \cos A_1 - a_2 \cos(A_1 + A_2) + a_3 \cos(A_1 + A_2 + A_3) - \ldots \\ \quad (-1)^{n-2} a_{n-1} \cos(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1}) = a_n \end{array}\right\} (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \sin A_1 - a_2 \sin(A_1 + A_2) + a_3 \sin(A_1 + A_2 + A_3) - \ldots \\ \quad (-1)^{n-2} a_{n-1} \sin(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_{n-1}) = o, \end{array}\right\} (5)$$

welche in Verbindung mit der bekannten Relation:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n = (n-2)\pi \qquad (6)$$

die Grundformeln zur Berechnung der Vielecke bilden.

Das Bildungsgesetz der Gleichungen (4) und (5) ist einleuchtend, und für die Berechnung unbekannter Stücke eines Vieleckes ist die Bemerkung von Wichtigkeit: daß in der Gleichung (4) der an der Abscissen- oder Grundlinie anliegende Winkel A_n nicht vorkommt, und in (5) sowohl A_n als a_n nicht.

Weiter ist zu bemerken: daß die ersten Theile der Gleichungen (4) und (5) mit der unmittelbar auf die zur Grundlinie genommenen Seite a_n folgenden Seite a_1 anfangen und mit der unmittelbar vor der Grundlinie a_n vorhergehenden Seite a_{n-1} schließen, was auch der Fall sein muß, wenn man irgend eine andere Seite zur Grundlinie nimmt. — Nimmt man z. B. die Seite a_r zur Grundlinie, so muß man mit der Seite a_{r+1} anfangen und mit a_{r-1} schließen. Dasselbe gilt hinsichtlich der Winkel A.

§. 119. In einem Vielecke können unbekannt sein: 1, 2, oder 3 Stücke; aber in dem letzten Falle nicht 3 Seiten. — Es kann also zu berechnen sein:

α) ein Winkel,

β) eine Seite,

γ) zwei Winkel,

δ) zwei Seiten,

ε) zwei Seiten und ein Winkel,

ζ) eine Seite und zwei Winkel,

η) drei Winkel.

Der Kürze und Bestimmtheit wegen wollen wir bei den hier zu lösenden Aufgaben ein Sechseck zum Grunde legen, was offenbar auf die Allgemeingültigkeit des Verfahrens keinen Einfluß hat.

α) Der gesuchte Winkel sei A_4, so hat man nach der Relation (6):

$$A_4 = 4\pi - (A_1 + A_2 + A_3 + A_5 + A_6).$$

β) Die unbekannte Seite sei A_5, so hat man, wenn man diese Seite zur Grundlinie nimmt, nach (4):

$$a_5 = a_6 \cos A_6 - a_1 \cos(A_6 + A_1) + a_2 \cos(A_6 + A_1 + A_2)$$
$$- a_3 \cos(A_6 + A_1 + A_2 + A_3) + a_4 \cos(A_6 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4).$$

γ) Wenn die beiden unbekannten Winkel zwei aufeinanderfolgende sind, etwa A_3 und A_4; so kann man die Seite a_2, oder die Seite a_4 zur Grundlinie nehmen, und alsdann erhält man nach (4) oder (5) eine Gleichung, worin nur der eine unbekannte Winkel A_4, oder A_3 noch vorkommt. Nimmt man z. B. a_4 zur Grundlinie, so hat man nach (5) die Gleichung:

$$a_5 \sin A_5 - a_6 \sin(A_5 + A_6) + a_1 \sin(A_5 + A_6 + A_1)$$
$$- a_2 \sin(A_5 + A_6 + A_1 + A_2) + a_3 \sin(A_5 + A_6 + A_1 + A_2 + A_3) = o,$$

woraus folgt:

$$\sin(A_5 + A_6 + A_1 + A_2 + A_3) = \frac{- a_5 \sin A_5 + a_6 \sin(A_5 + A_6) - a_1 \sin(A_5 + A_6 + A_1) + a_2 \sin(A_5 + A_6 + A_1 + A_2)}{a_3}$$

Hat man also:

$$A_5 + A_6 + A_1 + A_2 + A_3 = \psi$$

gefunden, so folgt:

$$A_3 = \psi - (A_5 + A_6 + A_1 + A_2).$$

Da die Winkel ψ, $\pi - \psi$, $2\pi + \psi$, ... alle einerlei Sinus haben, so ist in jedem besondern Falle zu untersuchen, welchen Werth man ψ geben muß.

Ist A_3 gefunden, so findet man A_4 leicht nach (6).

Wenn die beiden gesuchten Winkel nicht unmittelbar aufeinander

folgen, und etwa A_2 und A_5 sind; so zerlege man das Vieleck durch die Diagonale $A_2\,A_5$ in zwei andere Vielecke und berechne die an der Seite $A_2\,A_5$ liegenden unbekannten Winkel in jedem dieser beiden Vielecke auf die eben angegebene Weise, indem man $A_2\,A_5$ als Grundlinie nimmt.

δ) Es seien a_2, a_5 die beiden gesuchten Seiten. Man nehme successive a_2 und a_5 als Grundlinie, so erhält man nach (5) zwei Gleichungen, worin resp. a_2 und a_5 nicht vorkommen, und woraus folglich resp. a_5 und a_2 abgeleitet werden können.

ε) Die gesuchten Stücke seien die Seiten a_2, a_5 und der Winkel A_3. — Der Winkel A_3 ergibt sich sofort aus der Relation (6), und die Seiten a_2, a_5 findet man wie in (δ).

ζ) Die gesuchten Stücke seien die Seite a_3 und die Winkel A_2, A_5. — Nimmt man die dem ersten unbekannten Winkel A_2 vorausgehende Seite a_1 zur Gruudlinie, so hat man nach (4) und (5):

$$a_2 \cos A_2 - a_3 \cos(A_2 + A_3) + a_4 \cos(A_2 + A_3 + A_4) - a_5 \cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) + a_6 \cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6) = a_1, \quad (7)$$

$$a_2 \sin A_2 - a_3 \sin(A_2 + A_3) + a_4 \sin(A_2 + A_3 + A_4) - a_5 \sin(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) + a_6 \sin(A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6) = o, \quad (8)$$

und nach (6):

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 4\pi. \quad (9)$$

Zwischen den Gleichungen (7), (8), (9) muß man die beiden unbekannten Winkel A_2, A_5 eliminiren, wodurch man eine Gleichung erhält, in welcher nur die unbekannte Seite a_3 vorkommt. Zu dem Zwecke setze man alle Glieder, worin nur der eine unbekannte Winkel A_2 erscheint, auf die eine und die mit dem andern unbekannten Winkel A_5 auf die andere Seite der Gleichung, so erhält man:

$$a_2 \cos A_2 - a_3 \cos(A_2 + A_3) + a_4 \cos(A_2 + A_3 + A_4)$$
$$= a_1 + a_5 \cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) - a_6 \cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6),$$

$$a_2 \sin A_2 - a_3 \sin(A_2 + A_3) + a_4 \sin(A_2 + A_3 + A_4)$$
$$= a_5 \sin(A_2 + A_3 + A_4 + A_5) - a_6 \sin(A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6).$$

Erhebt man diese beiden letzten Gleichungen zum Quadrat, addirt und reducirt, so ergibt sich:

$$a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 - 2a_2 a_3 \cos A_3 + 2a_2 a_4 \cos(A_3 + A_4) - 2a_3 a_4 \cos A_4$$
$$= a^2_1 + a^2_5 + a^2_6 + 2a_1 a_5 \cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5)$$
$$- 2a_1 a_6 \cos(A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6) - 2a_5 a_6 \cos A_6.$$

Wegen $A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + A_6 = 4\pi - A_1$ hat man also auch:

$a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 - 2a_2a_3\cos A_3 + 2a_2a_4\cos(A_3+A_4) - 2a_3a_4\cos A_4$
$= a^2_1 + a^2_6 + a^2_5 - 2a_1a_6\cos A_1 + 2a_1a_5\cos(A_1+A_6) - 2a_5a_6\cos A_6$. (10)
Aus dieser letzten Gleichung ergibt sich:

$$a_3 = M \pm \sqrt{M^2 + N},$$

worin nur das **obere** Zeichen zu nehmen, und:

$M = a_2\cos A_3 + a_4\cos A_4$,
$N = a^2_1 + a^2_5 + a^2_6 - a^2_2 - a^2_4 - 2a_2a_4\cos(A_3+A_4) - a_1a_6\cos A_1$
$+ 2a_1a_5\cos(A_1+A_6) - 2a_5a_6\cos A_6$
ist. —

Wenn a_3 gefunden ist, so ergeben sich die Winkel A_2, A_5 nach ζ). Man kann sie aber auch durch Elimination der Seite a_3 zwischen den Gleichungen (4), (5) und (6) erhalten, oder noch einfacher, wenn man für die Gleichung (5) die der Seite a_3 als Grundlinie entsprechende setzt, nämlich:

$a_4\sin A_4 - a_5\sin(A_4+A_5) + a_6\sin(A_4+A_5+A_6) -$
$a_1\sin(A_4+A_5+A_6+A_1) + a_2\sin(A_4+A_5+A_6+A_1+A_2) = o$. (10)

Da ferner $A_4+A_5+A_6+A_1+A_2 = 4\pi - A_3$ ist, so kommt in (10) nur noch der unbekannte Winkel A_5 vor, und wenn man $\sin A_5$ ausscheidet und nach $\sin A_5$ und $\cos A_5$ ordnet; so erhält man:

$$A\sin A_5 + B\cos A_5 + C = o, \qquad (11)$$

wo $A = -a_5\cos A_4 + a_6\cos(A_4+A_6) - a_1\cos(A_4+A_6+A_1) + a_2\cos(A_4+A_6+A_1+A_2)$,
$B = -a_5\sin A_4 + a_6\sin(A_4+A_6) - a_1\sin(A_4+A_6+A_1) + a_2\sin(A_4+A_6+A_1+A_2)$,
$C = +a_4\sin A_4$
bekannte Größen sind. Aus (11) folgt aber:

$$\sin A_5 + \frac{B}{A}\cos A_5 = -\frac{C}{A},$$

und wenn man $\frac{B}{A} = \tang \varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ setzt; so hat man:

$$\sin A_5 \cos\varphi + \cos A_5 \sin\varphi = -\frac{C}{A}\cos\varphi,$$

d. h.: $$\sin(A_5+\varphi) = -\frac{C}{A}\cos\varphi,$$

woraus sich A_5 ergibt. — Setzt man den für A_5 gefundenen Werth in (9), so erhält man endlich auch A_2.

Das Bildungsgesetz der Gleichung (10), worin zwei **Vieleckswinkel fehlen**, läßt sich leicht folgendermaßen in Worten aussprechen: „**Auf der einen Seite stehen die Summe der**

Quadrate der nach der gewählten Reihenfolge zwischen den zwei fehlenden Winkeln liegenden Seiten, so wie die doppelten Produkte aus je zwei dieser Seiten und dem Cosinus der Summe der zwischen ihnen liegenden Winkel, und zwar sind diese Produkte positiv, oder negativ, je nachdem die Zeigersumme der darin vorkommenden Seiten gerade, oder ungerade ist — und auf der andern Seite der Gleichung findet dasselbe Gesetz statt, wenn man von dem ersten fehlenden Winkel in entgegengesetztem Sinne bis zu dem zweiten fehlenden Winkel fortgeht. —" Man kann also nach diesem Gesetze sofort die Gleichung bilden, worin zwei bestimmte Winkel des Vieleckes fehlen.

η) Die gesuchten Stücke seien die drei Winkel A_1, A_4, A_5, so bilde man nach dem vorhin ausgesprochenen Gesetze eine Gleichung, worin die beiden Winkel A_4, A_5 fehlen, und man hat:

$$a^2_4 = a^2_3 + a^2_2 + a^2_1 + a^2_6 + a^2_5 - 2a_3a_2\cos A_3 + 2a_3a_1\cos(A_3+A_2)$$
$$-2a_3a_6\cos(A_3+A_2+A_1) + 2a_3a_5\cos(A_3+A_2+A_1+A_6) -$$
$$2a_2a_1\cos A_2 + 2a_2a_6\cos(A_2+A_1) - 2a_2a_5\cos(A_2+A_1+A_6)$$
$$-2a_1a_6\cos A_1 + 2a_1a_5\cos(A_1+A_6) - 2a_6a_5\cos A_6,$$

oder wenn man wieder nach $\sin A_1$ und $\cos A_1$ ordnet:

$$A\sin A_1 + B\cos A_1 + C = 0, \qquad (12)$$

worin $A = 2a_3a_6\sin(A_3+A_2) - 2a_3a_5\sin(A_3+A_2+A_6)$
$-2a_2a_6\sin A_2 + 2a_2a_5\sin(A_2+A_6) - 2a_1a_5\sin A_6$,
$B = -2a_3a_6\cos(A_3+A_2) + 2a_3a_5\cos(A_3+A_2+A_6)$
$+2a_2a_6\cos A_2 - 2a_2a_5\cos(A_2+A_6) - 2a_1a_6 + 2a_1a_5\cos A_6$,
$C = a^2_3 + a^2_2 + a^2_1 + a^2_6 + a^2_5 - a^2_4 - 2a_3a_2\cos A_3 + 2a_3a_1\cos(A_3+A_2)$
$-2a_2a_1\cos A_2 - 2a_6a_5\cos A_6$

bekannte Größen sind. — Löst man nun die Gleichung (12) auf dieselbe Weise wie (11) auf, so erhält man A_1 und A_4, A_5 ergeben sich alsdann am einfachsten nach ζ), können aber auch wie A_1 berechnet werden.

§. 120. Wenn man die Seiten eines Vieleckes alle in demselben Sinne verlängert und die dadurch entstehenden Außenwinkel mit A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, . . . bezeichnet, so ist:

$$A_1 = \pi - A'_1,\ A_2 = \pi - A'_2,\ A_3 = \pi - A'_3, \ldots$$

Setzt man diese Werthe von A_1, A_2, A_3, . . . in die Relationen (2'), so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \pi - A'_1 , \\ \alpha_2 = \pi - (A'_1 + A'_2) , \\ \alpha_3 = \pi - (A'_1 + A'_2 + A'_3) , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (13)$$

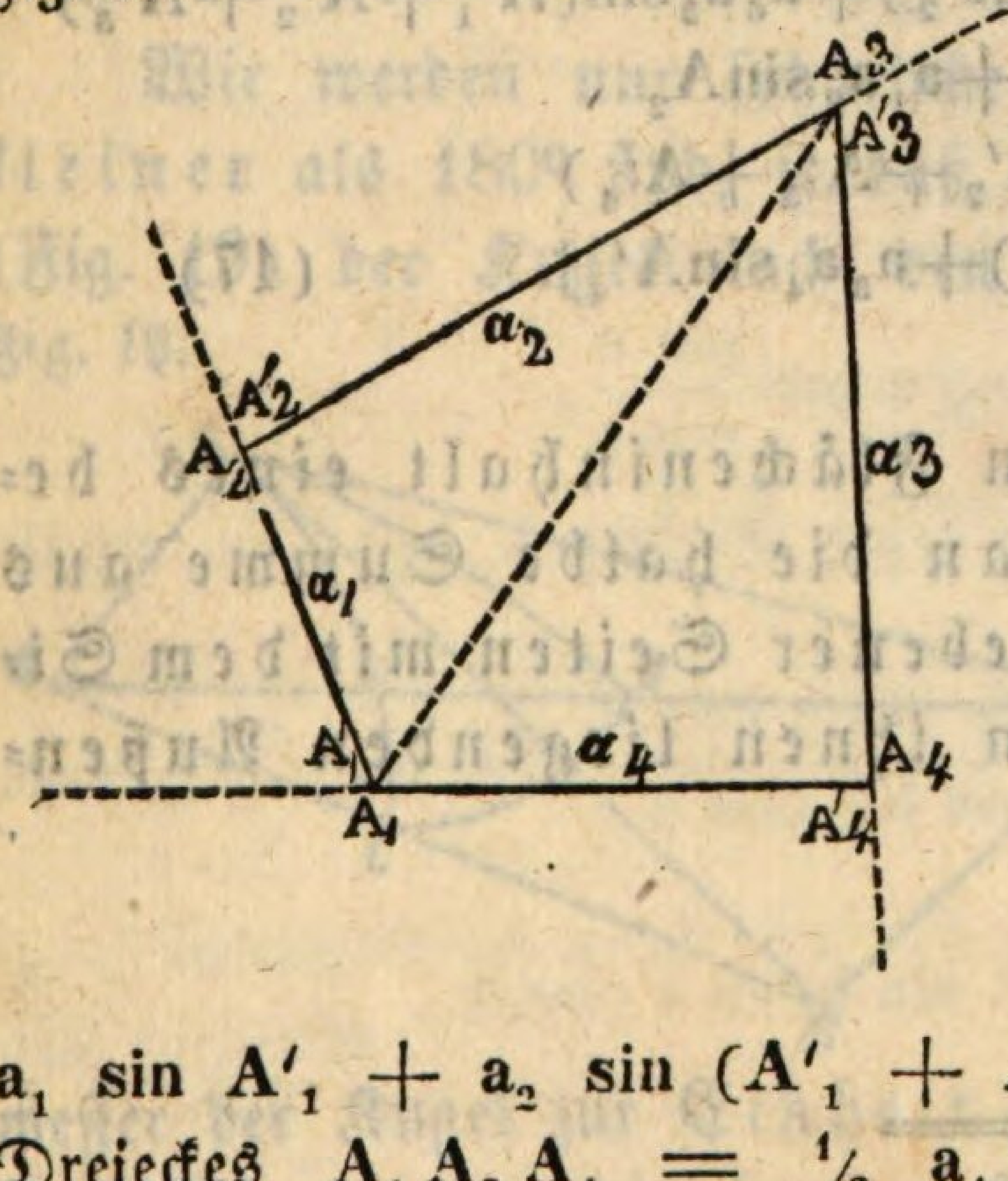
und wenn man diese Werthe von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in die zweite der Gleichungen (1) substituirt; so findet man für die Höhen oder Ordinaten der Punkte A_2, A_3, A_4, ... (Fig. 16) über der Seite a_n successive die Ausdrücke:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \sin A'_1 , \\ a_1 \sin A'_1 + a_2 \sin(A'_1 + A'_2) , \\ a_1 \sin A'_1 + a_2 \sin(A'_1 + A'_2) + a_3 \sin(A'_1 + A'_2 + A'_3) , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (14)$$

Wenn die Seiten eines Vieleckes bis auf eine und die zwischen den gegebenen Seiten liegenden Winkel, also auch die entsprechenden Außenwinkel gegeben sind; so läßt sich leicht ein gesetzmäßiger Ausdruck für den Flächeninhalt des Vieleckes finden.

1) Es sei zunächst $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ (Fig. 17) ein Viereck, worin die Seiten a_4, a_1 und a_2, so wie die Winkel A_1, A_2; also auch die Außenwinkel A'_1, A'_2 gegeben sind. — Wenn man die auf die fehlende Seite a_3 folgende a_4 zur Grundlinie nimmt und die Diagonale $A_1 A_3$ zieht; so ist die Fläche des Dreieckes $A_1 A_2 A_3 = \frac{1}{2}\ a_1 a_2 \sin A'_2$, und die Höhe des Dreieckes $A_1 A_3 A_4$ nach dem zweiten der Ausdrücke (14) $= a_1 \sin A'_1 + a_2 \sin (A'_1 + A'_2)$; folglich der Flächeninhalt des Dreieckes $A_1 A_3 A_4 = \frac{1}{2}\ a_4\ a_1 \sin A'_1 + \frac{1}{2}\ a_4\ a_1 \sin (A'_1 + A'_2)$, und mithin endlich der Flächeninhalt F_4 des Viereckes $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$:

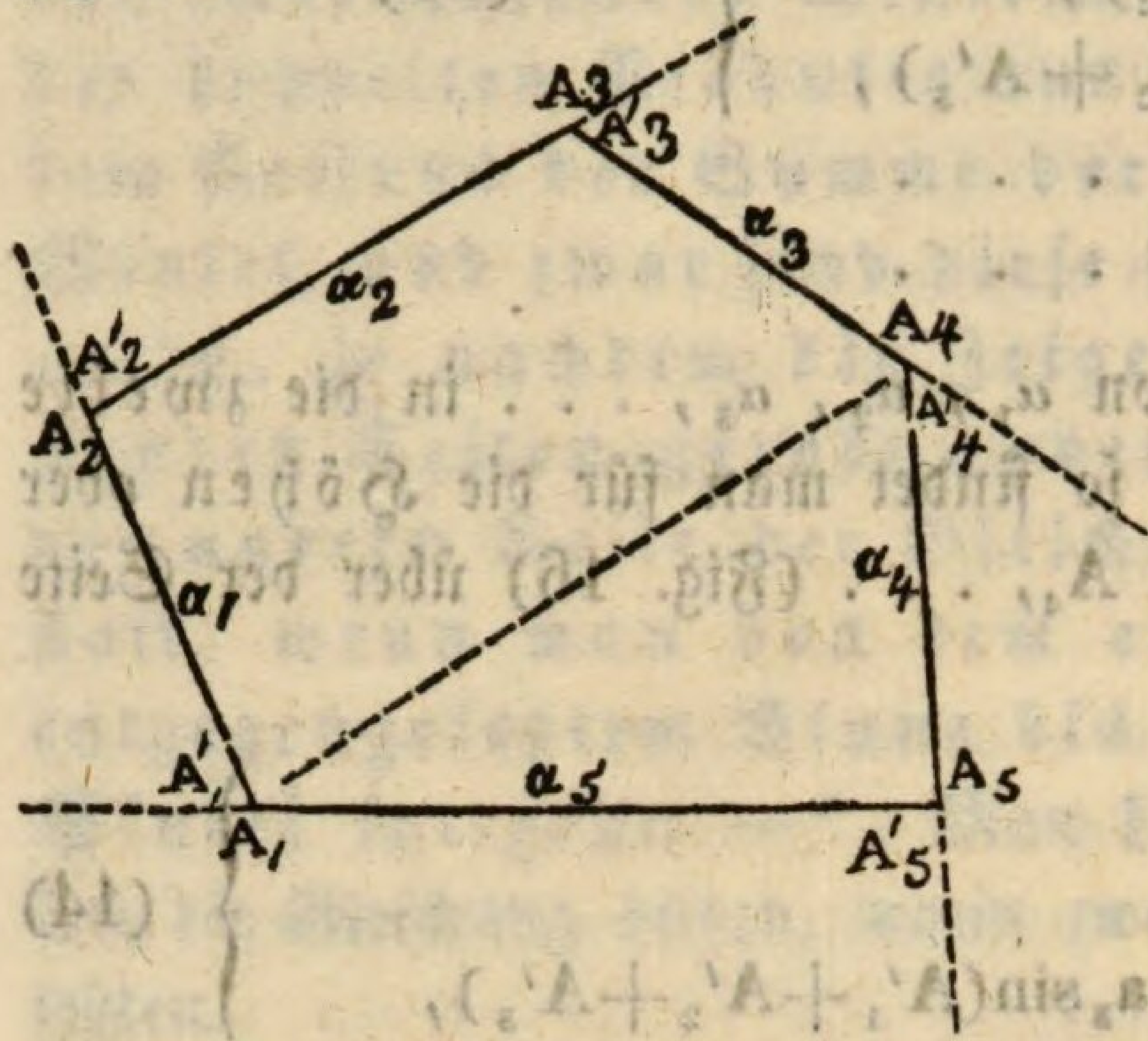
Fig. 17.



$$F_4 = \tfrac{1}{2}\,[a_4\, a_1 \sin A'_1 + a_4\, a_2 \sin (A'_1 + A'_2) + a_1\, a_2 \sin A'_2]. \quad (15)$$

2) Ferner sei A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 (Fig. 18) ein Fünfeck, wovon die Seiten a_5, a_1, a_2, a_3 und die zwischenliegenden Winkel A_1, A_2, A_3, also auch die Außenwinkel A'_1, A'_2, A'_3 gegeben sind. — Nimmt man a_5 zur Grundlinie und zieht die Diagonale A_1 A_4, so zerfällt das Fünfeck in das Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ und in das Dreieck $A_1 A_4 A_5$, dessen Höhe nach dem dritten der Ausdrücke (14) ist:

Fig. 18.



$$a_1 \sin A'_1 + a_2 \sin(A'_1 + A'_2) + a_3 \sin(A'_1 + A'_2 + A'_3)$$

Der Flächeninhalt des Viereckes $A_1 A_2 A_3 A_4$ ergibt sich sofort aus (15), wenn man darin resp. a_1, a_2, a_3; A'_2, A'_3 statt a_4, a_1, a_2; A'_1, A'_2 setzt. Man hat also endlich für den Flächeninhalt F_5 des Fünfeckes:

$$F_5 = \tfrac{1}{2}[a_5 a_1 \sin A'_1 + a_5 a_2 \sin(A'_1 + A'_2) + a_5 a_3 \sin(A'_1 + A'_2 + A'_3) + a_1 a_2 \sin A'_2 + a_1 a_3 \sin(A'_2 + A'_3) + a_2 a_3 \sin A'_3]. \quad (16)$$

Ebenso ergibt sich für den Flächeninhalt F_6 eines Sechseckes:

$$F_6 = \tfrac{1}{2}[a_6 a_1 \sin A'_1 + a_6 a_2 \sin(A'_1 + A'_2) + a_6 a_3 \sin(A'_1 + A'_2 + A'_3) + a_6 a_4 \sin(A'_1 + A'_2 + A'_3 + A'_4) + a_1 a_2 \sin A_2 + a_1 a_3 \sin(A'_2 + A'_3) + a_1 a_4 \sin(A'_2 + A'_3 + A'_4) + a_2 a_3 \sin A'_3 + a_2 a_4 \sin(A'_3 + A'_4) + a_3 a_4 \sin A'_4]. \quad (17)$$

U. s. f.

Man erhält demnach den Flächeninhalt eines beliebigen Vieleckes, wenn man die halbe Summe aus den Produkten je zweier gegebener Seiten mit dem Sinus der Summe der zwischen ihnen liegenden Außenwinkel berechnet.

Drittes Buch.

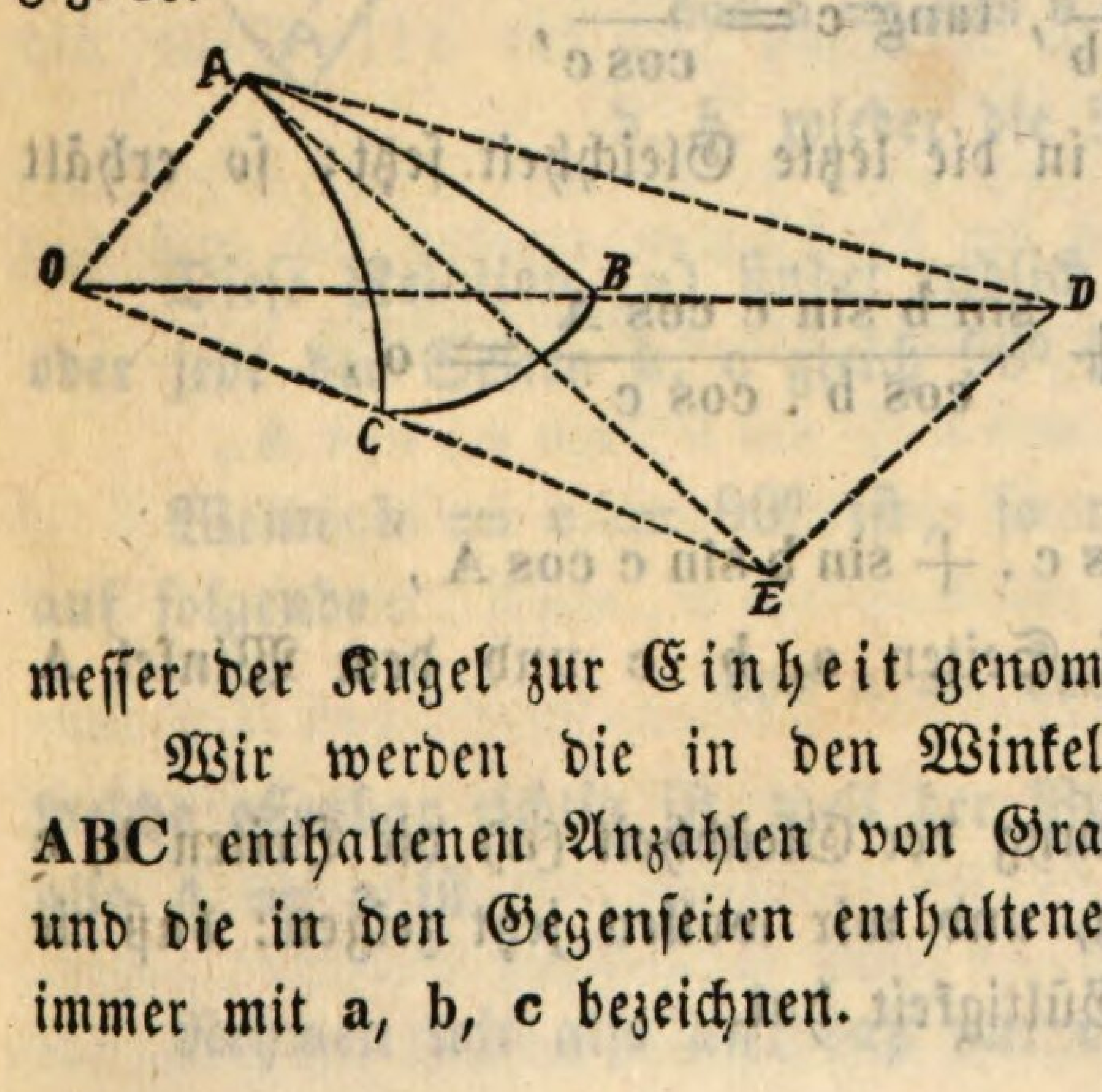
Sphärische Trigonometrie.

§. 121. Zweck der sphärischen Trigonometrie. — Der Zweck der sphärischen Trigonometrie besteht in der Auflösung der sphärischen Dreiecke, d. h. in der Berechnung der in ihren Seiten und Winkeln enthaltenen Anzahl von Graden, Minuten, Sekunden, 2c., wenn die zur Bestimmung des Dreieckes hinreichende Anzahl von Elementen gegeben ist.

Wenn die in den Seiten eines sphärischen Dreieckes enthaltene Anzahl von Graden, Minuten, 2c. bekannt ist; so kann man auch leicht die Verhältnisse dieser Seiten zu dem Halbmesser der Kugel finden, wenn es nöthig ist (§. 96.).

Wir werden nur sphärische Dreiecke betrachten, deren Seiten kleiner als 180° sind, so daß, wenn man von dem Mittelpunkte O (Fig. 19) der Kugel nach den drei Winkelspitzen des sphärischen Dreieckes ABC Halbmesser zieht, eine dreiseitige Körperecke entsteht, deren ebene und Flächenwinkel durch dieselben Zahlen gemessen werden, als die Seiten und Winkel des sphärischen Dreieckes, wenn der Halbmesser der Kugel zur Einheit genommen wird.

Fig. 19.



Wir werden die in den Winkeln eines sphärischen Dreieckes ABC enthaltenen Anzahlen von Graden, 2c. immer mit A, B, C und die in den Gegenseiten enthaltenen Anzahlen von Graden, 2c. immer mit a, b, c bezeichnen.

Relationen zwischen den Seiten und Winkeln eines sphärischen Dreieckes.

§. 122. **Relationen zwischen den 3 Seiten und einem Winkel.** — Es sei ABC (Fig. 19) ein sphärisches Dreieck auf einer Kugel, deren Mittelpunkt O und deren Halbmesser = 1 ist, und wir wollen annehmen: daß jede der Seiten b, c **kleiner** als 90^0 ist. Zieht man vom Kugelmittelpunkte O nach den drei Winkelspitzen A, B, C des Dreieckes Halbmesser und an die Bogen AB, AC die Tangenten AD, AE, welche die verlängerten Halbmesser OB, OC resp. in D und E schneiden; so hat man:

$$AD = \text{tang } c, \ OD = \sec c, \ AE = \text{tang } b, \ OE = \sec b,$$
$$DAE = A, \ DOE = a,$$

und die Dreiecke DAE, DOE geben:

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\,\overline{AD}\,.\,\overline{AE}\cos DAE,$$
$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2\,\overline{OD}\,.\,\overline{OE}\cos DOE;$$

folglich, wenn man diese beiden Gleichheiten von einander abzieht:

$$(\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2) + (\overline{OE}^2 - \overline{AE}^2) - 2\,\overline{OD}\,.\,\overline{OE}\cos DOE$$
$$+ 2\,\overline{AD}\,.\,\overline{AE}\cos DAE = o,$$

oder wenn man bemerkt: daß $\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{AE}^2 = 1$ ist, und beiderseits mit 2 dividirt:

$$1 - \sec b \sec c \cos a + \text{tang } b \text{ tang } c \cos A = o.$$

Nun ist aber:

$$\sec b = \frac{1}{\cos b}, \ \sec c = \frac{1}{\cos c},$$
$$\text{tang } b = \frac{\sin b}{\cos b}, \ \text{tang } c = \frac{\sin c}{\cos c},$$

und wenn man diese Werthe in die letzte Gleichheit setzt; so erhält man:

$$1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \frac{\sin b \sin c \cos A}{\cos b\,.\,\cos c} = o,$$

oder:

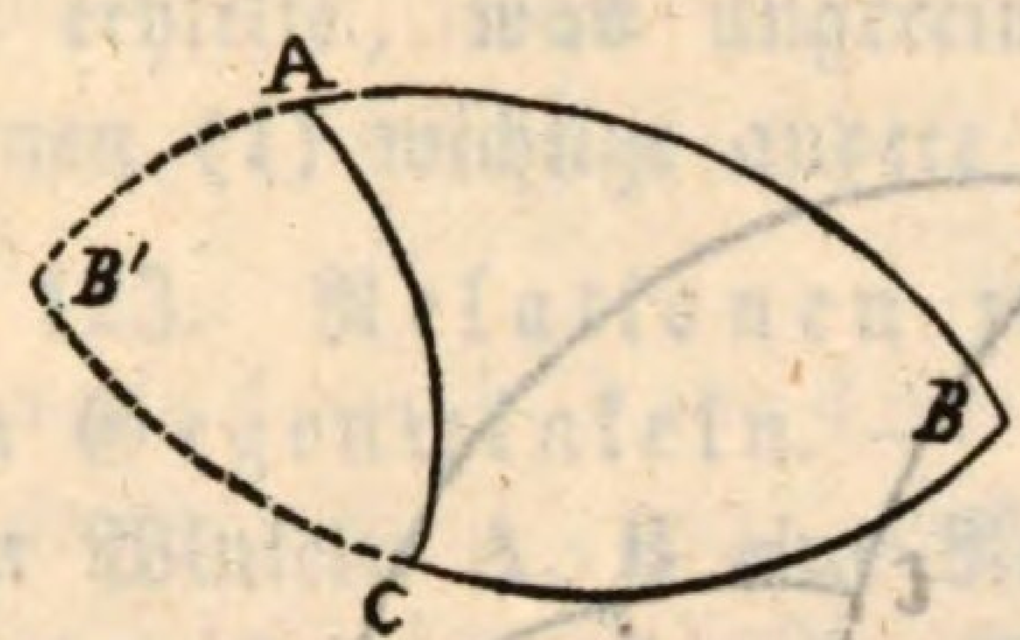
$$(\alpha) \qquad \cos a = \cos b \cos c\,. + \sin b \sin c \cos A,$$

welches die zwischen den drei Seiten a, b, c und dem Winkel A stattfindende Relation ist.

Wir haben bei der Ableitung der Gleichheit (α) die Seiten b, c **kleiner** als 90^0 vorausgesetzt, und wir wollen jetzt zeigen: daß die Relation (α) **allgemeine** Gültigkeit hat.

Es sei zunächst $c > 90^0$, aber $b < 90^0$ (Fig. 20), und die Bogen AB, BC wollen wir bis zu ihrem Zusammentreffen in B' verlängern, $AB' = c'$, $CB' = a'$ setzen; so gibt das Dreieck AB'C:

Fig. 20.



$$\cos a' = \cos b \cos c' + \sin b \sin c' \cos B'AC,$$

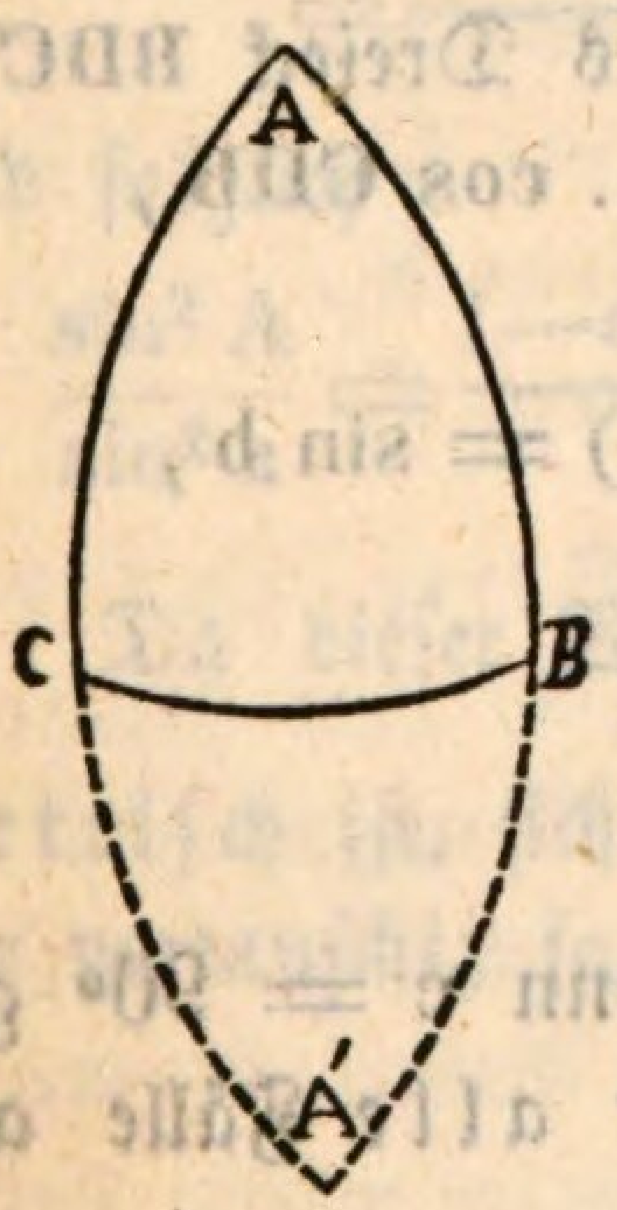
weil $c' < 90^0$ und $b < 90^0$ ist. Setzt man nun in dieser Gleichheit für a', c' und $B'AC$ ihre resp. Werthe $180^0 - a$, $180^0 - c$ und $180^0 - A$, und ändert die Zeichen beider Theile; so kommt:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

d. h. die Relation (α) wieder.

Es seien nun $b > 90^0$, $c > 90^0$ (Fig. 21) und die Seiten AB, AC bis zu ihrem Zusammentreffen in A' verlängert; ferner $A'C = b'$, $A'B = c'$; so gibt das Dreieck A'BC:

Fig. 21.



$$\cos a = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'$$

und wenn man hierin für b', c' und A' ihre resp. Werthe:

$$180^0 - b,\ 180^0 - c \text{ und } A$$

setzt; so erhält man:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

d. h. wieder die Relation (α).

Diese Relation (α) findet endlich auch noch statt, wenn eine, oder jede der Seiten b, c gleich 90^0 ist.

Wenn $b = c = 90^0$ ist, so reducirt sich die Relation (α) auf folgende:

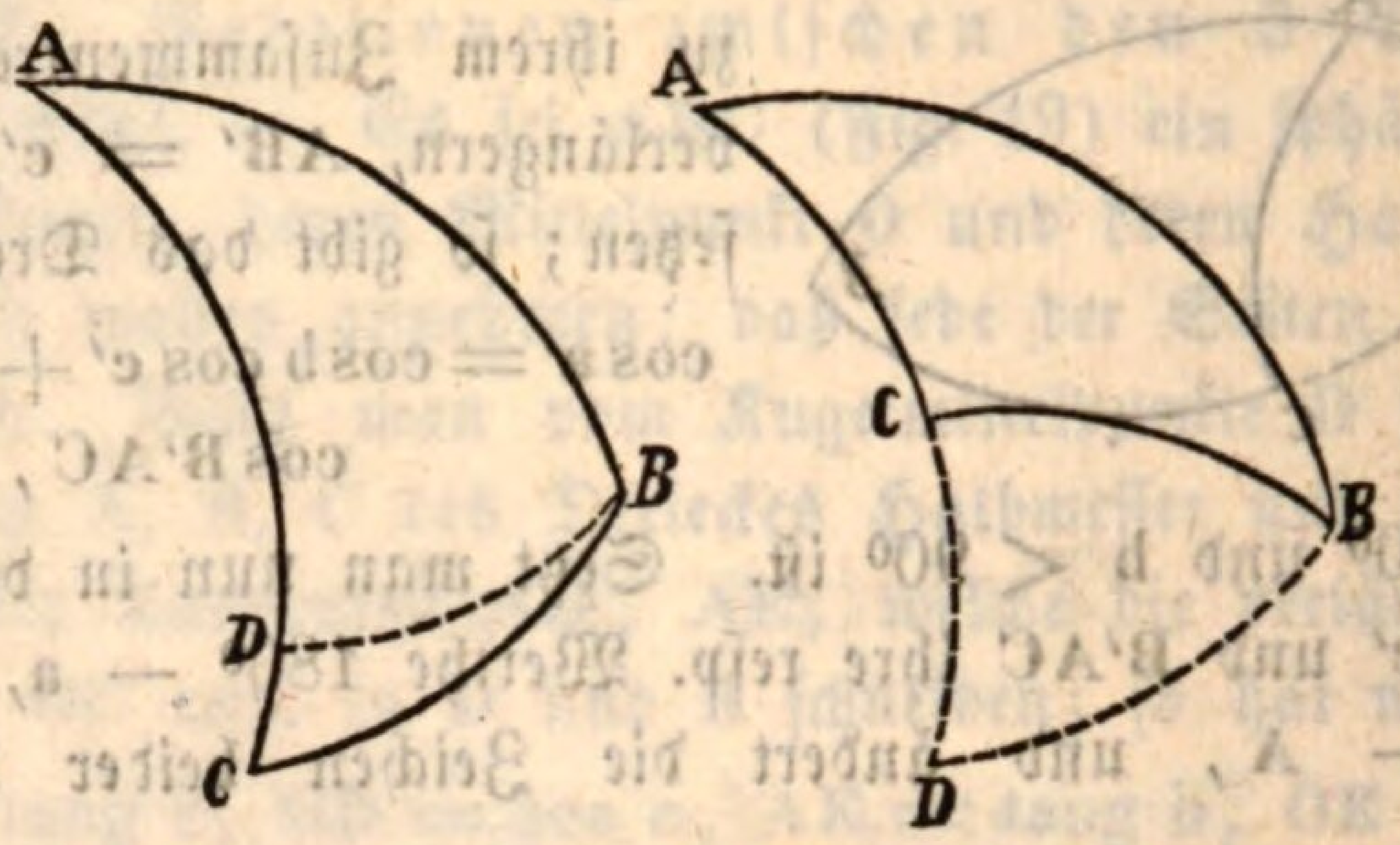
$$\cos a = \cos A,$$

welche offenbar richtig ist, weil der Punkt A der Pol der Seite BC, also $A = a$ ist.

Nehmen wir also an: daß nur $c = 90^0$ ist, nehmen auf dem

Bogen AC (Fig. 22) AD $= 90^0$ und ziehen den Bogen BD des

Fig. 22.



größten Kreises. Wenn BD $= 90^0$ ist, so ist der Punkt B der Pol des Bogens AC; es ist also $a = 90^0$, $b = 90^0$ und auch $A = 90^0$; denn das Dreieck ABD hat drei rechte Winkel, und die Relation (α) reducirt sich auf die Identität:

$$o = o.$$

Wenn BD von 90^0 verschieden ist, so gibt das Dreieck BDC:

$$\cos a = \cos CD \,.\, \cos BD + \sin CD \,.\, \sin BD \,.\, \cos CDB\,,$$

und außerdem ist:

$$\cos CDB = o,\ \cos CD = \cos \pm (90^0 - b) = \sin b\,,$$
$$\cos BD = \cos A;$$

folglich hat man:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos A.$$

Auf diese letzte Relation reducirt sich (α), wenn $c = 90^0$ gesetzt wird; und mithin ist die Relation (α) für alle Fälle als richtig erwiesen.

Durch bloße Vertauschung der Buchstaben ergeben sich aus (α) zwei analoge Relationen, so daß man die 3 Gleichungen hat:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos A\,, \\ \cos b = \cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos B\,, \\ \cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos C\,, \end{cases}$$

welche als die Grundformeln der ganzen sphärischen Trigonometrie angesehen werden müssen. In der That kann es keine von den Relationen (1) verschiedene Relation zwischen den Seiten a, b, c und den Winkeln A, B, C eines sphärischen Dreieckes geben, weil man sonst durch Elimination der Winkel mittelst der Relatio-

nen (1) eine nicht identische Relation zwischen den drei Seiten a, b, c erhielte, was ungereimt ist. — Aber man kann aus den Relationen (1) wichtige andere Relationen herleiten.

§. 123. Relationen zwischen zwei Seiten und den beiden Gegenwinkeln. — Um z. B. zwischen den Seiten a, b und den Winkeln A, B eine Relation zu erhalten, brauchte man zwischen den beiden ersten der Relationen (1) nur c zu eliminiren; allein man gelangt auf folgende Weise einfacher zum Ziele:

Die erste der Gleichungen (1) gibt:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

und folglich ist:

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{1-\cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

und folglich:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Da dieser Werth von $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}$ in Beziehung auf a, b, c symmetrisch ist, sich also nicht ändert, wenn man a, b, c untereinander vertauscht; so hat man:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c},$$

und da a, b, c, A, B, C alle kleiner als 180° sind, so ist endlich:

$$(2) \qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

d. h. in jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinus der Winkel wie die Sinus der Gegenseiten.

§. 124. Relationen zwischen zwei Seiten, dem zwischenliegenden Winkel und dem der einen Seite gegenüberliegenden Winkel. — Um z. B. eine Relation zwischen den Seiten a, b und den Winkeln A, C zu erhalten, braucht man nur c zwischen der ersten und dritten der Re-

lationen (1) zu eliminiren, indem man zur Abkürzung der Elimination von den Gleichungen (2) Gebrauch macht.

Wenn man cos c zwischen der ersten und dritten der Relationen (1) eliminirt, so findet man:

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A.$$

Setzt man cos a $\cos^2$ b in den ersten Theil, substituirt $\sin^2$ b für $1 - \cos^2$ b, und dividirt dann beide Theile durch sin a sin b; so kommt:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \frac{\sin c \cos A}{\sin a}.$$

Wegen $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$ erhält man endlich für die gesuchte Relation:

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A,$$

woraus sich durch Vertauschung der Buchstaben 5 ähnliche Relationen ergeben, so daß man folgende 6 Gleichungen hat:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A, \\ \cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B, \\ \cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A, \\ \cot c \sin a = \cos a \cos B + \sin B \cot C, \\ \cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B, \\ \cot c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \cot C. \end{array} \right.$$

§. 125. **Relationen zwischen einer Seite und den drei Winkeln.** — Um z. B. zwischen a, A, B, C eine Relation zu erhalten, müßte man b und c zwischen den Gleichungen (1) eliminiren; allein man gelangt einfacher zum Ziele, wenn man von dem Polar- oder Supplementardreiecke Gebrauch macht, worunter bekanntlich ein sphärisches Dreieck verstanden wird, dessen Seiten a′, b′, c′ die Supplemente der Winkel A, B, C und dessen Winkel A′, B′, C′ die Supplemente der Seiten a, b, c des betrachteten Dreieckes sind. — Für dieses Polar- oder Supplementardreieck ist also:

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A',$$

und wenn man hierin für a′, b′, c′, A′ ihre resp. Werthe:

$$180^0 - A,\ 180^0 - B,\ 180^0 - C,\ 180^0 - a$$

setzt und die Zeichen beider Theile ändert; so erhält man die Gleichung:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

Durch bloße Vertauschung der Buchstaben ergeben sich hieraus

zwei ähnliche Relationen, so daß man also die folgenden drei Gleichungen hat:

$$(14)\quad \begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{cases}$$

§. 126. Besonderer Fall der rechtwinkligen Dreiecke. — Die spitzen und stumpfen Winkel eines sphärischen Dreieckes werden schiefe genannt — und wenn ein sphärisches Dreieck nur einen rechten Winkel hat; so heißt die gegenüberliegende Seite die Hypotenuse und die beiden andern Seiten heißen Katheten.

Wenn man in denen der Gleichungen (1), (2), (3), (4), worin A vorkommt, diesen Winkel $A = 90^0$ setzt; so erhält man für das rechtwinklige sphärische Dreieck die folgenden Relationen:

$$(5)\quad \cos a = \cos b \,.\, \cos c,$$

$$(6)\quad \begin{cases} \sin b = \sin a \sin B, \\ \sin c = \sin a \sin C, \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \text{tang } b = \text{tang } a \cos C, \\ \text{tang } c = \text{tang } a \cos B, \\ \text{tang } b = \sin c \text{ tang } B, \\ \text{tang } c = \sin b \text{ tang } C. \end{cases}$$

$$(8)\quad \begin{cases} \cos a = \cot B \cot C, \\ \cos B = \cos b \sin C, \\ \cos C = \cos c \sin B. \end{cases}$$

Nach der Gleichung (5) ist also in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke der Cosinus der Hypotenuse gleich dem Produkte der Cosinus der beiden andern Seiten. — Es sind also in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke die Cosinus der drei Seiten positiv, oder zwei davon sind negativ, und folglich die drei Seiten kleiner als 90^0, oder eine dieser Seiten ist kleiner als 90^0.

Nach den Gleichungen (6) ist in jedem sphärischen rechtwinkligen Dreiecke der Sinus einer Kathete gleich dem Sinus der Hypotenuse multiplicirt mit dem Sinus des gegenüberliegenden Winkels.

Nach den beiden ersten der Gleichungen (7) ist in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke die Tangente einer Kathete gleich der Tangente der Hypotenuse multiplicirt mit dem Cosinus des anliegenden Winkels.

Nach den beiden letzten der Gleichungen (7) ist in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke die Tangente einer Kathete gleich dem Sinus der andern Kathete multiplicirt mit der Tangente des der ersten gegenüberliegenden Winkels.

Hieraus folgt: daß die Tangente eines schiefen Winkels dasselbe Zeichen hat, als die Tangente der gegenüberliegenden Seite, so daß also diese Seite und dieser Winkel von einerlei Art, d. h. beide größer, oder beide kleiner als 90° sind.

Nach der ersten der Gleichungen (8) ist in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke der Cosinus der Hypotenuse gleich dem Produkte aus den Cotangenten der beiden schiefen Winkel; und nach den beiden letzten der Gleichungen (8) ist in jedem rechtwinkligen sphärischen Dreiecke der Cosinus eines schiefen Winkels gleich dem Cosinus der gegenüberliegenden Seite multiplicirt mit dem Sinus des andern schiefen Winkels.

Ableitung der Relationen für geradlinige Dreiecke aus denen für sphärische Dreiecke.

§. 127. Es kommen Aufgaben vor, wobei es nöthig ist, die Relationen zu betrachten, welche zwischen den Längen der Seiten eines sphärischen Dreieckes und den Winkeln desselben stattfinden.

Wir wollen größerer Allgemeinheit wegen die Längeneinheit ganz unbestimmt lassen, und es seien α, β, γ, **R** die Zahlen, welche die Längen der Seiten eines sphärischen Dreieckes und den Halbmesser der Kugel ausdrücken, worauf dasselbe liegt. Wenn man den Halbmesser dieser Kugel zur Längeneinheit nähme, so würden die Seiten des sphärischen Dreieckes durch:

$$\frac{\alpha}{\mathbf{R}},\ \frac{\beta}{\mathbf{R}},\ \frac{\gamma}{\mathbf{R}}$$

ausgedrückt, was auch einleuchtet, wenn man sich auf einer Kugel von dem Halbmesser = 1 ein dem gegebenen ähnliches Dreieck denkt, dessen Seiten die Längen:

$$\frac{\alpha}{\mathbf{R}},\ \frac{\beta}{\mathbf{R}},\ \frac{\gamma}{\mathbf{R}}$$

haben und auch dieselbe Anzahl von Graden, 2c. enthalten, als die des gegebenen Dreieckes.

Will man z. B. aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie die der ebenen ableiten, so braucht man in erstern für **a**, **b**, **c** nur $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{\beta}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$ zu setzen, und dann zu untersuchen: in was sie übergehen, wenn α, β, γ constant bleiben und R unendlich groß wird. — Wir wollen diese Bemerkung zunächst auf die Formeln (1) und (2) anwenden.

Wenn x einen zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Bogen bedeutet, so ist nach den Gleichungen (8) in §. 65.:

$$\sin x < x \text{ und } \sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \text{ und } \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Wenn also Θ und ϑ zwei Brüche bezeichnen, deren Werth von x abhängt, wovon aber der erste stets zwischen o und $\frac{1}{6}$, und der andere zwischen o und $\frac{1}{24}$ liegt; so kann man setzen:

$$\sin x = x - \Theta x^3,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \vartheta x^4.$$

Betrachten wir nun die Gleichung:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B},$$

und setzen darin $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{\beta}{R}$ statt a, b; so kommt:

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{R}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{\beta}{R}}{\sin B};$$

also wenn Θ, Θ' zwei zwischen o und $\frac{1}{6}$ liegende Brüche bedeuten

$$\frac{\frac{\alpha}{R} - \Theta \cdot \frac{\alpha^3}{R^3}}{\sin A} = \frac{\frac{\beta}{R} - \Theta' \cdot \frac{\beta^3}{R^3}}{\sin B},$$

oder:

$$\frac{\alpha - \Theta \cdot \frac{\alpha^3}{R^2}}{\sin A} = \frac{\beta - \Theta' \cdot \frac{\beta^3}{R^2}}{\sin B},$$

und wenn man jetzt $R = \infty$ setzt:

$$\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B},$$

welches eine Grundformel der ebenen Trigonometrie ist.

Betrachten wir jetzt die Gleichung:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

oder:

$$\cos \frac{\alpha}{R} = \cos \frac{\beta}{R} \cos \frac{\gamma}{R} + \sin \frac{\beta}{R} \sin \frac{\gamma}{R} \cos A,$$

so ist, wenn Θ, Θ' wieder zwei zwischen o und $\frac{1}{6}$ und ϑ, ϑ', ϑ'' drei zwischen o und $\frac{1}{24}$ liegende Brüche bedeuten:

$$\left(1-\frac{\alpha^2}{2 R^2}+\vartheta.\frac{\alpha^4}{R^4}\right)=\left(1-\frac{\beta^2}{2 R^2}+\vartheta'.\frac{\beta^4}{R^4}\right)\left(1-\frac{\gamma^2}{2R^2}+\vartheta''.\frac{\gamma^4}{R^4}\right)$$
$$+\left(\frac{\beta}{R}-\Theta.\frac{\beta^3}{R^3}\right)\left(\frac{\gamma}{R}-\Theta'.\frac{\gamma^3}{R^3}\right)\cos A.$$

Wenn man die angezeigten Rechnungen verrichtet, reducirt und dann $R = \infty$ setzt; so erhält man:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A,$$

wieder eine Grundformel der ebenen Trigonometrie.

Auflösung der rechtwinkligen sphärischen Dreiecke.

§. 128. Ein sphärisches Dreieck kann zwei, und sogar drei rechte Winkel haben. Im ersten Falle sind zwei Seiten = 90° und die dritte Seite ist dem gegenüberliegenden Winkel gleich. Im zweiten Falle ist jede der drei Seiten = 90°, so daß also Dreiecke dieser Art keine zu lösende Aufgabe darbieten können.

Die Auflösung der sphärischen Dreiecke mit einem rechten Winkel bietet 6 verschiedene Fälle dar, welche wir nacheinander behandeln wollen, zuvor aber die wichtige Bemerkung machen: daß, wenn eine Seite, oder ein Winkel eines sphärischen Dreieckes durch seinen Cosinus, seine Tangente oder Cotangente gegeben wird, der Werth desselben völlig bestimmt ist, weil diese Seite, oder dieser Winkel zwischen o und 180° liegt. Wenn aber diese Seite, oder dieser Winkel durch seinen Sinus gegeben wird, so ist der Werth dieser Seite, oder dieses Winkels nicht vollständig bestimmt, weil zwei Supplementarwinkel, oder Supplementarbogen denselben Sinus haben.

§. 129. Erster Fall. — Wenn die Hypotenuse a und eine Kathete b gegeben ist, die andere Kathete c und die beiden schiefen Winkel B, C zu berechnen.

Für die Kathete c gibt die Gleichung (5):

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b},$$

und für die Winkel B, C geben die erste der Gleichungen (6) und die erste der Gleichungen (7):

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{\text{tang } b}{\text{tang } a}.$$

Die Aufgabe gestattet nur eine Auflösung, obgleich der Winkel B durch seinen Sinus gegeben wird, weil man weiß: daß B und b gleichartig sind (§. 126.).

§. 130. Zweiter Fall. — Wenn die beiden Katheten b, c gegeben sind, die Hypotenuse a und die beiden schiefen Winkel B, C zu berechnen.

Die Gleichung (5) gibt:

$$\cos a = \cos b \, . \cos c,$$

und die beiden letzten der Gleichungen (7) geben:

$$\text{tang } B = \frac{\text{tang } b}{\sin c}, \quad \text{tang } C = \frac{\text{tang } c}{\sin b}.$$

§. 131. Dritter Fall. — Wenn die Hypotenuse a und der schiefe Winkel B gegeben ist, den andern schiefen Winkel C und die beiden Katheten b, c zu berechnen.

Die erste der Gleichungen (6), die zweite der Gleichungen (7) und die erste der Gleichungen (8) geben resp.:

$$\sin b = \sin a \sin B,$$

$$\text{tang } c = \text{tang } a \cos B,$$

$$\text{tang } C = \frac{\cot B}{\cos a}.$$

Die Aufgabe gestattet nur eine Auflösung, weil man weiß: daß b und B von derselben Art sind.

§. 132. Vierter Fall. — Wenn eine Kathete b und der Gegenwinkel B gegeben ist, die Seiten a, c und den Winkel C zu berechnen.

Die erste der Gleichungen (6), die dritte der Gleichungen (7) und die zweite der Gleichungen (8) geben resp.:

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B},$$

$$\sin c = \frac{\tang b}{\tang B},$$

$$\sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

Untersuchung. — Da die drei Unbekannten a, c und C durch ihre Sinus gegeben sind, so kann jede derselben zwei Supplementarwerthe haben, und es muß folglich untersucht werden, welche Werthe zusammengehören.

Wenn zunächst $b = B$ ist, so hat man:

$$\sin a = \sin c = \sin C = 1,\ a = c = C = 90^0,$$

und das Dreieck hat zwei rechte Winkel. — Wir wollen also b verschieden von B annehmen.

1) Wenn $b < 90^0$ ist, so muß, damit die Aufgabe möglich sei, auch $B < 90^0$ sein, und zugleich $b < B$. Wird diese Bedingung erfüllt, so ist cos b positiv, und die Gleichung:

$$\cos a = \cos b \cos c$$

zeigt: daß a und c von einerlei Art sind, so wie c und C ebenfalls gleichartig sind. — Wenn also a′, c′ und C′ die kleinern Werthe als 90⁰ sind, welche die Tafeln für a, c und C geben; so hat man die beiden Auflösungen:

$$a = a',\qquad c = c',\qquad C = C',$$

$$a = 180^0 - a',\quad c = 180^0 - c',\quad C = 180^0 - C'.$$

2) Wenn $b > 90^0$ ist, so muß, wenn die Aufgabe möglich sein soll, auch $B > 90^0$ und $b > B$ sein. — Wird diese Bedingung erfüllt, so ist cos b negativ, die Gleichung:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c$$

zeigt: daß a und c von verschiedener Art sind, und da c, C von gleicher Art sind; so hat man die beiden Auflösungen:

$$a = a',\qquad c = 180^0 - c',\quad C = 180^0 - C',$$

$$a = 180^0 - a',\quad c = c',\qquad C = C',$$

wo a′, c′, C′ wieder die durch die Tafeln gegebenen Werthe von a, c, C bedeuten.

Es ist leicht einzusehen: daß, mit Ausnahme von $b = B$, die Aufgabe zwei Auflösungen gestattet, wenn sie überhaupt möglich ist. — Denn wenn das in A (Fig. 20) rechtwinklige Dreieck ABC der Aufgabe genügt, und man verlängert die Seiten AB, BC bis

zu ihrem Zusammentreffen in B′; so entsteht ein zweites rechtwinkliges Dreieck AB′C, welches der Aufgabe ebenfalls genügt.

§. 133. Fünfter Fall. — Wenn die Kathete b und der anliegende Winkel C gegeben ist, die Seiten a, c und den Winkel B zu berechnen.

Die erste und vierte der Gleichungen (7) geben:

$$\tang a = \frac{\tang b}{\cos C}, \quad \tang c = \sin b \tang C,$$

und die zweite der Gleichungen (8) gibt:

$$\cos B = \cos b \,.\, \cos C.$$

Sechster Fall. — Wenn die beiden schiefen Winkel B, C gegeben sind, die drei Seiten a, b, c zu berechnen.

Die Formeln (8) geben:

$$\cos a = \cot B \cot C,$$

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C},$$

$$\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

Wenn der zu berechnende Winkel oder Bogen durch seinen Cosinus, oder durch seine Tangente gegeben wird, und der Werth dieses Cosinus, oder dieser Tangente negativ ist; so muß man bei der logarithmischen Berechnung das Supplement nehmen, welches, abgesehen vom Zeichen, denselben Cosinus und dieselbe Tangente hat.

Auflösung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke.

§. 134. Die Auflösung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke läßt sich in folgenden Fällen auf die eines rechtwinkligen sphärischen Dreieckes zurückführen:

1) Wenn sich unter den gegebenen Stücken eine Seite $= 90^0$ befindet, so ist das Supplementar- oder Polardreieck rechtwinklig, und wenn man dieses letzte Dreieck, worin außer dem rechten Winkel noch zwei Elemente bekannt sind, auflös't; so ergeben sich daraus auch die unbekannten Stücke des gegebenen Dreieckes.

2) Wenn unter den gegebenen Elementen zwei gleiche Seiten a = b, oder zwei gleiche Winkel A = B vorkommen, so theilt das aus der Spitze C auf die Seite AB gefällte Perpendikel das Dreieck ABC in zwei in allen ihren Theilen gleiche rechtwinklige Dreiecke.

Löst man alsdann das rechtwinklige Dreieck ACD auf, worin außer dem rechten Winkel noch zwei Elemente bekannt sind; so erhält man unmittelbar die unbekannten Stücke des vorgelegten Dreieckes.

3) Wenn sich unter den gegebenen Elementen zwei Seiten a, b oder zwei Winkel A, B befinden, deren Summe = 180° ist, und man verlängert die Seiten a, b bis zu ihrem Zusammentreffen in B′ (Fig. 20); so erhält man ein Dreieck AB′C, worin zwei Seiten, oder zwei Winkel einander gleich sind. Die Auflösung des Dreieckes AB′C läßt sich aber, wie wir gesehen haben, auf die eines rechtwinkligen Dreieckes zurückführen, wodurch also die des gegebenen Dreieckes bewerkstelligt ist.

In jedem dieser Fälle kann man also die allgemeine Auflösung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke, welche 6 verschiedene Fälle darbietet, umgehen.

§. 135. Erster Fall. — Wenn die drei Seiten a, b, c gegeben sind, die Winkel A, B, C zu berechnen.

Der Winkel A wird durch die Gleichung:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

gegeben, woraus folgt:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}.$$

Diese Formel ist nicht logarithmisch brauchbar, allein man kann leicht eine solche daraus ableiten. Setzt man nämlich den vorhergehenden Werth von cos A in die Formeln:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}},$$

so ergibt sich:

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin b \sin c + \cos b \cos c - \cos a}{2 \sin b \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos (b - c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin \frac{a - b + c}{2} \sin \frac{a + b - c}{2}}{\sin b \,.\, \sin c}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\cos a - \cos b \cos c + \sin b \sin c}{2 \sin b \,.\, \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos a - \cos (b + c)}{2 \sin b \,.\, \sin c}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin\left(\frac{a + b + c}{2}\right) \sin\left(\frac{-a + b + c}{2}\right)}{\sin b \,.\, \sin c}},$$

oder wenn man $a + b + c = 2p$ setzt:

$$(1) \quad \sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin b \,.\, \sin c}},$$

$$(2) \quad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-a)}{\sin b \,.\, \sin c}},$$

und hieraus:

$$(3) \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{\sin (p-b) \sin (p-c)}{\sin p \sin (p-a)}}.$$

In diesen drei Formeln muß das Wurzelzeichen positiv genommen werden, weil die trigonometrischen Linien des spitzen Winkels $\frac{1}{2}$ A alle positiv sind.

Ebenso findet man:

$$(4) \quad \sin \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-c)}{\sin a \sin c}},$$

$$(5) \quad \cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-b)}{\sin a \,.\, \sin c}},$$

$$(6) \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-c)}{\sin p \sin (p-b)}},$$

und:

$$(7) \quad \sin \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin a \,.\, \sin b}},$$

$$(8) \quad \cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin p \sin (p-c)}{\sin a \sin b}},$$

$$(9) \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin (p-a) \sin (p-b)}{\sin p \sin (p-c)}}.$$

Wenn man alle drei Winkel A, B, C zu berechnen hat, so muß man die Formeln (3), (6) und (9) anwenden, weil man alsdann nur 4 Logarithmen zu suchen hat.

Soll mit den gegebenen Seiten a, b, c ein Dreieck möglich sein, so ist erforderlich und zureichend: daß jede dieser Seiten klei-

ner sei, als die Summe der beiden andern, und daß ihre Summe weniger als 360° betrage. — Diese Bedingungen findet man wieder, wenn man untersucht: in welchem Falle der obige Werth von tang $\frac{1}{2}$ A reell, oder die Werthe von sin $\frac{1}{2}$ A, cos $\frac{1}{2}$ A reell und kleiner als 1 werden.

§. 136. Zweiter Fall. — Wenn zwei Seiten a, b und der der einen gegenüberliegende Winkel A gegeben sind, die Seite c und die Winkel B, C zu berechnen.

Der Winkel B ergibt sich aus der Formel:

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a},$$

und die Seite c aus der Gleichung:

$$\cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$= \cos b\, (\cos c + \tan b \cos A \sin c).$$

Um eine logarithmisch brauchbare Formel zu erhalten, berechnet man wie in §. 73. einen Hülfswinkel φ von solcher Beschaffenheit, daß:

$$\tan \varphi = \tan b \cos A$$

ist, und man kann den Winkel φ zwischen o und 90°, oder zwischen 90° und 180° nehmen, je nachdem tang b cos A positiv, oder negativ ist. Alsdann hat man:

$$\cos a = (\cos c + \tan \varphi \sin c) \cos b$$
$$= (\cos c \cos \varphi + \sin \varphi \sin c)\, \frac{\cos b}{\cos \varphi}$$
$$= \cos (c - \varphi)\, \frac{\cos b}{\cos \varphi};$$

folglich:

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \,.\, \cos \varphi}{\cos b}.$$

Diese Formel gibt c — φ, und folglich auch c.

Nachdem die Seite c berechnet ist, kann man den Winkel C durch die Formel:

$$\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a}$$

berechnen; aber wenn man den Winkel C direkt haben will, so muß man die Gleichung:

$$\cot a \sin b = \cos b \,.\, \cos C + \cot A \,.\, \sin C$$

anwenden, und einen Hülfswinkel:

$$\tang \psi = \frac{\cot A}{\cos b}$$

berechnen. Alsdann hat man:

$$\cot a \,.\, \sin b = \cos b\,(\cos C + \tang \psi \sin C)$$
$$= \frac{\cos b}{\cos \psi} \cos (C - \psi)$$

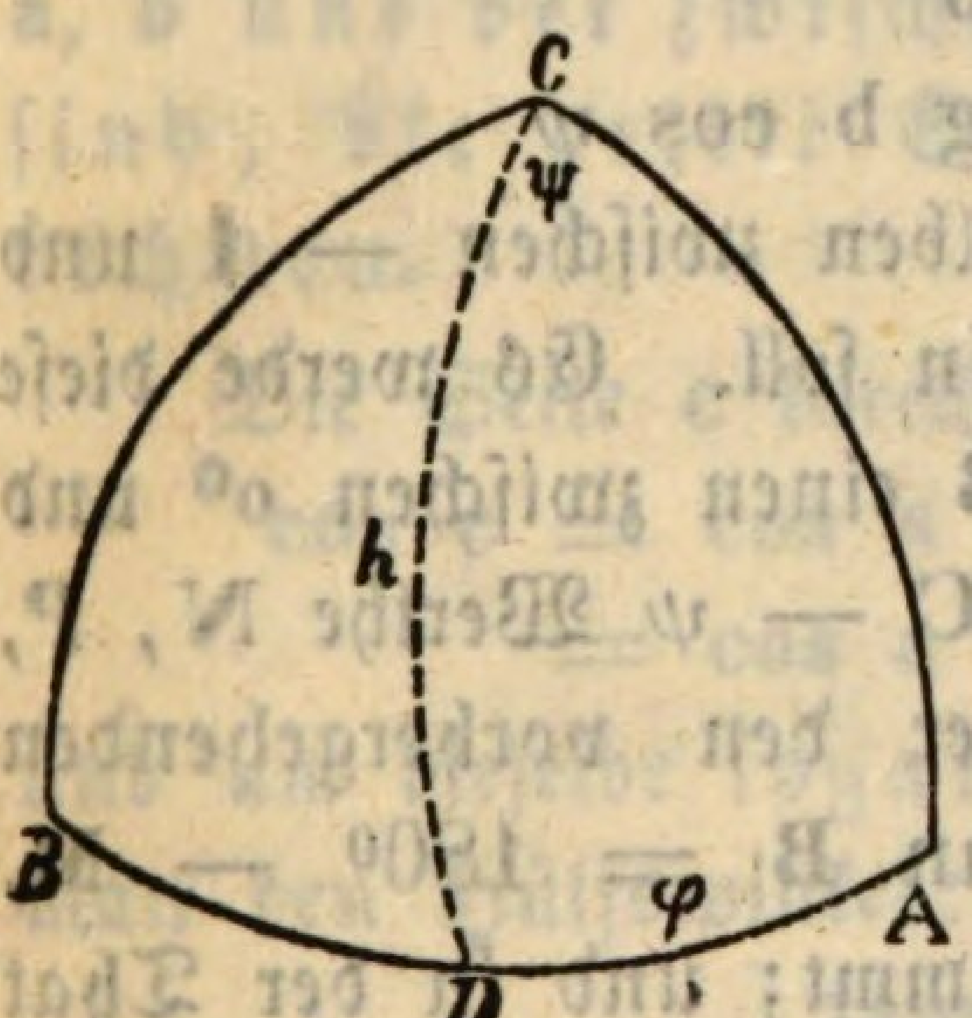
folglich:

$$\cos (C - \psi) = \cot a \tang b \cos \psi,$$

welche Formel $C - \psi$, und mithin C gibt.

Die Einführung der Hülfswinkel φ, ψ ist gleichbedeutend mit der Zerlegung des Dreieckes ABC (Fig. 23) in zwei rechtwinklige Dreiecke durch ein Perpendikel CD = h. Denn bezeichnet φ den Bogen AD und ψ den Winkel ACD, so gibt das rechtwinklige Dreieck ACD:

Fig. 23.



$$\tang \varphi = \tang b \,.\, \cos A,\; \cos h = \frac{\cos b}{\cos \varphi},$$

und das Dreieck BCD gibt:

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a}{\cos h} = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}.$$

Der Winkel φ ist also derselbe, als der früher mit demselben Buchstaben bezeichnete Winkel.

Ebenso hat man in dem Dreiecke ACD:

$$\cot \psi = \cos b \,.\, \tang A,$$
$$\tang h = \cos \psi \tang b,$$

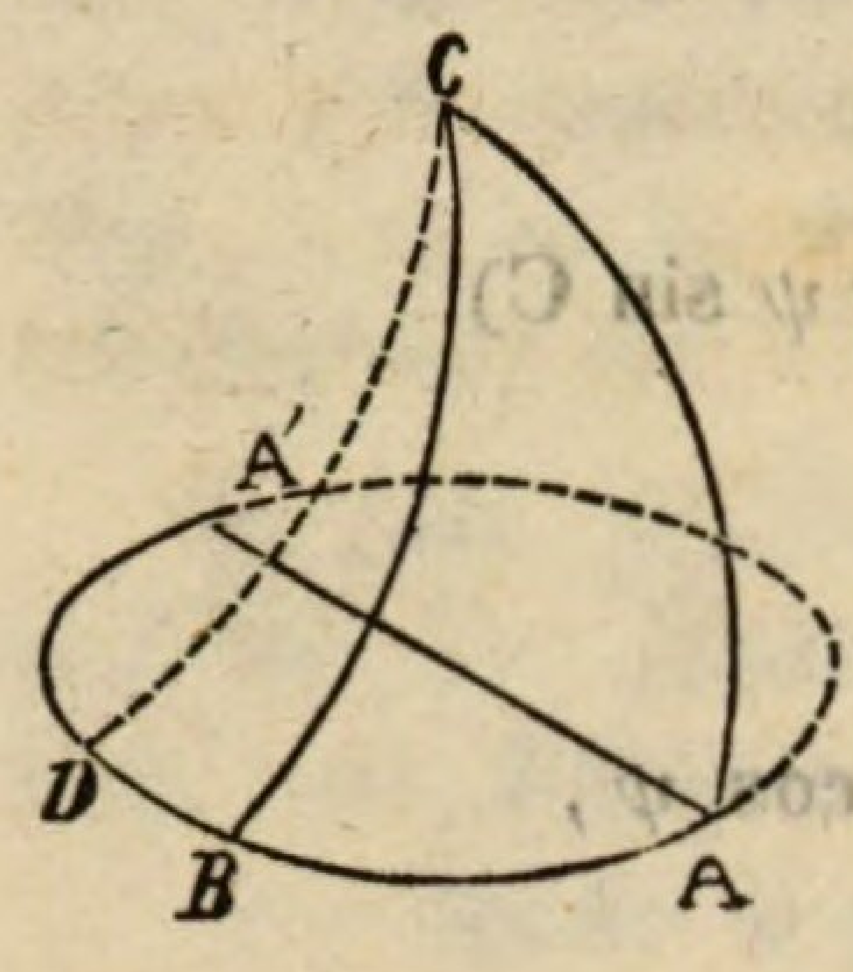
und in dem Dreiecke BCD:

$$\cos (C - \psi) = \cot a \tang h = \cot a \tang b \cos \psi,$$

woraus erhellet: daß der Winkel ψ derselbe ist, wie oben.

Wir haben vorausgesetzt: daß der Fußpunkt D des Perpendikels CD (Fig. 23) zwischen A und B fällt; es kann sich aber auch anders verhalten. Der Punkt D, welcher immer auf dem

Fig. 24.



Halbkreise ABA' (Fig. 24) liegt, kann auch zwischen B und A' fallen; aber in diesem Falle hat man nur $c - \varphi$ und $C - \psi$ resp. in $\varphi - c$ und $\psi - C$ zu verwandeln, und man sieht: daß sich die vorhergehenden Formeln dadurch nicht ändern, weil nur die Cosinus von $c - \varphi$ und $C - \psi$ darin vorkommen.

Untersuchung. — Betrachten wir die Formeln:

$$\sin B = \frac{\sin b \cdot \sin A}{\sin a},$$

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b},$$

$$\cos (C - \psi) = \cot a \cdot \tang b \cos \psi$$

wieder, so müssen die zweiten Theile derselben zwischen — 1 und + 1 liegen, wenn die Aufgabe möglich sein soll. Es werde diese Bedingung erfüllt, so geben die Tafeln für B einen zwischen 0^0 und 90^0 liegenden Werth M, und für $c - \varphi$, $C - \psi$ Werthe N, P, welche zwischen 0^0 und 180^0 liegen. Aber den vorhergehenden Gleichungen wird auch genügt, wenn man $B = 180^0 - M$, $c - \varphi = - N$ und $C - \psi = - P$ nimmt; und in der That finden zwei Auflösungen statt. Wir werden später auf die Untersuchung dieser Aufgabe wieder zurückkommen; allein wir glauben schon jetzt zeigen zu müssen, wie man in jedem Falle die zusammengehörigen Werthe von B, C und c bestimmen kann. — Aus Fig. 23 und Fig. 24 erhellet: daß die Differenzen $c - \varphi$, $C - \psi$ immer dasselbe Zeichen haben; man muß also:

$$c = \varphi + N \text{ mit } C = \psi + P,$$

und:

$$c = \varphi - N \text{ mit } C = \psi - P$$

nehmen.

Sehen wir jetzt, welchen Werth von B man in jedem dieser Fälle nehmen muß.

Wenn man $c = \varphi + N$ nimmt, so hat man den Fall der Fig. 23, wo der Fußpunkt des Perpendikels CD zwischen A und B fällt. Alsdann sind in den rechtwinkligen Dreiecken ACD, BCD die Winkel A, B beide mit der Seite CD gleichartig, und man muß folglich nehmen:

$$B = M \text{, oder } B = 180^0 - M,$$

je nachdem der gegebene Winkel A spitz, oder stumpf ist.

Nimmt man $c = \varphi - N$, so hat man den Fall der Fig. 24. Alsdann ist in dem Dreiecke CAD der Winkel A mit CD gleichartig, während CD in dem Dreiecke CBD mit dem Winkel CBD gleichartig ist, und mithin ungleichartig mit B. — Die Winkel A, B sind also ungleichartig, und man muß folglich nehmen:

$$B = 180^0 - M \text{, oder } B = M,$$

je nachdem der gegebene Winkel A spitz, oder stumpf ist. —

Jede der beiden betrachteten Auflösungen findet nicht mehr statt, wenn der Werth von c, oder der entsprechende von C negativ, oder $> 180^0$ ist.

§. 137. Dritter Fall. — Wenn die beiden Seiten a, b und der zwischen ihnen liegende Winkel C gegeben sind, die dritte Seite c und die Winkel A, B zu berechnen.

Die Seite c berechnet man nach der Formel:

$$\cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos C$$
$$= \cos a \, (\cos b + \sin b \,.\, \text{tang } a \,.\, \cos C),$$

und um dieselbe logarithmisch brauchbar zu machen, berechnet man den Hülfswinkel:

$$\text{tang } \varphi = \text{tang } a \,.\, \cos C,$$

wodurch man erhält:

$$\cos c = \cos a \, (\cos b + \text{tang } \varphi \sin b)$$
$$= \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Suchen wir nun den Winkel A, so haben wir:

$$\cot a \sin b = \cos b \,.\, \cos C + \sin C \cot A,$$

woraus folgt:

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos b \,.\, \cos C}{\sin C}$$
$$= \cot C \left(\frac{\cot a}{\cos C} \,.\, \sin b - \cos b\right)$$
$$= \cot C \, (\cot \varphi \sin b - \cos b)$$
$$= \frac{\cot C \,.\, \sin (b - \varphi)}{\cos \varphi},$$

wo φ der schon früher angewandte Hülfswinkel ist.

Ebenso ergibt sich:

$$\cot B = \frac{\cot C \,.\, \sin(a - \psi)}{\cos \psi},$$

indem der Hülfswinkel ψ durch die Gleichung:

$$\tang \psi = \tang b \,.\, \cos C$$

bestimmt wird.

Die Einführung der Hülfswinkel φ, ψ ist gleichbedeutend mit der Zerlegung des betrachteten Dreieckes in zwei rechtwinklige Dreiecke durch ein von A auf BC und durch ein von B auf AC gefälltes Perpendikel.

§. 138. Vierter Fall. — Wenn die Seite c und die beiden daran liegenden Winkel A, B gegeben sind, den Winkel C und die beiden Seiten a, b zu berechnen.

Zur Berechnung des Winkels C bedient man sich der Formel:

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \,.\, \sin B \,.\, \cos c$$
$$= \cos A\,(-\cos B + \sin B \,.\, \tang A \,.\, \cos c).$$

Um diese Formel logarithmisch brauchbar zu machen, berechnet man den Hülfswinkel φ nach der Gleichung:

$$\cot \varphi = \tang A \,.\, \cos c,$$

und erhält so:

$$\cos C = \cos A\,(-\cos B + \sin B \cot \varphi)$$
$$= \frac{\cos A \,.\, \sin(B - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Die Seite a ergibt sich aus der Gleichung:

$$\cot a \,.\, \sin c = \cos c \,.\, \cos B + \sin B \cot A$$
$$= \cos c \left(\cos B + \sin B \,.\, \frac{\cot A}{\cos c}\right)$$
$$= \cos c\,(\cos B + \sin B \,.\, \tang \varphi)$$
$$= \frac{\cos c \,.\, \cos(B - \varphi)}{\cos \varphi},$$

woraus folgt:

$$\cot a = \frac{\cot c \,.\, \cos(B - \varphi)}{\cos \varphi},$$

wo φ wieder den schon früher angewandten Hülfswinkel bedeutet.

Ebenso ergibt sich für die Seite b:

$$\cot b = \frac{\cot c \,.\, \cos(A - \psi)}{\cos \psi},$$

wo ψ durch die Gleichung:

$$\cot \psi = \tang B \,.\, \cos c$$

bestimmt wird.

§. 139. Fünfter Fall. — Wenn zwei Winkel **A**, **B**, so wie die dem einen gegenüberliegende Seite **a** gegeben sind, den Winkel **C** und die Seiten **b**, **c** zu berechnen.

Die Seite **b** ergibt sich aus der Formel:

$$\sin b = \frac{\sin a \cdot \sin B}{\sin A}.$$

Zur Bestimmung des Winkels **C** wendet man die Formel:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \sin C \cdot \cos a$$
$$= \cos B\,(-\cos C + \sin C \operatorname{tang} B \cos a)$$

an, und wenn man den Hülfswinkel ψ nach der Gleichung:

$$\cot \psi = \operatorname{tang} B \cos a$$

berechnet; so erhält man:

$$\cos A = \cos B\,(-\cos C + \sin C \cot \psi)$$
$$= \frac{\cos B \sin (C - \psi)}{\sin \psi},$$

folglich:

$$\sin (C - \psi) = \frac{\cos A \cdot \sin A}{\cos B}.$$

Zur Berechnung der Seite **c** bedient man sich der Formel:

$$\cot a \sin c = \cos c \cdot \cos B + \sin B \cot A,$$

woraus folgt:

$$\frac{\cot a}{\cos B} \cdot \sin c - \cos c = \operatorname{tang} B \cdot \cot A,$$

und wenn man den Hülfswinkel:

$$\cot \varphi = \frac{\cot a}{\sin B}$$

berechnet; so erhält man:

$$\cot \varphi \cdot \sin c - \cos c = \operatorname{tang} B \cdot \cot A,$$

oder:

$$\sin (c - \varphi) = \operatorname{tang} B \cdot \cot A \cdot \sin \varphi.$$

Dieser vierte Fall gestattet, wie der zweite, zwei Auflösungen, und die Untersuchung ist ganz dieselbe, wie dort.

§. 140. Sechster Fall. — Wenn die drei Winkel **A**, **B**, **C** gegeben sind, die drei Seiten **a**, **b**, **c** zu berechnen.

Die Seite **a** wird durch die Gleichung:

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

bestimmt, welche gibt:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

und hieraus ergibt sich:

$$\sin {}^1\!/_2\, a = \sqrt{\frac{\sin B \,.\, \sin C - \cos B \,.\, \cos C - \cos A}{2 \sin B \,.\, \sin C}}$$

$$= \sqrt{\frac{-\cos A - \cos (B + C)}{2 \sin B \sin C}}$$

$$= \sqrt{\frac{-\cos\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{-A+B+C}{2}\right)}{\sin B \,.\, \sin C}},$$

$$\cos {}^1\!/_2\, a = \sqrt{\frac{\sin B \sin C + \cos B \cos C + \cos A}{2 \sin B \,.\, \sin C}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos A + \cos (B - C)}{2 \sin B \,.\, \sin C}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\left(\frac{A-B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+B-C}{2}\right)}{\sin B \,.\, \sin C}},$$

oder wenn man $A + B + C - 180^0 = 2 \triangle$ setzt:

$$\sin {}^1\!/_2\, a = \sqrt{\frac{\sin \triangle \,.\, \sin (A - \triangle)}{\sin B \,.\, \sin C}},$$

$$\cos {}^1\!/_2\, a = \sqrt{\frac{\sin (B - \triangle) \sin (C - \triangle)}{\sin B \,.\, \sin C}};$$

folglich:

$$\tang {}^1\!/_2\, a = \sqrt{\frac{\sin \triangle \sin (A - \triangle)}{\sin (B - \triangle) \sin (C - \triangle)}}.$$

Jede dieser drei letzten Formeln ist logarithmisch brauchbar, und durch bloße Vertauschung der Buchstaben ergeben sich daraus zur Berechnung der Seiten b, c sechs analoge Formeln.

§. 141. Wir haben im Vorhergehenden alle sechs bei der Auflösung schiefwinkliger sphärischer Dreiecke vorkommenden Fälle direkt gelöst; allein es muß bemerkt werden: daß sich die drei letzten Fälle mit Hülfe des Polar- oder Supplementardreieckes leicht auf die drei ersten zurückführen lassen.

Formeln von Gauß und Neper.

§. 142. Die Formeln:

$$\sin \tfrac{1}{2}(A \pm B) = \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \pm \cos \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B,$$
$$\cos \tfrac{1}{2}(A \pm B) = \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \mp \sin \tfrac{1}{2} A \sin \tfrac{1}{2} B$$

geben unter Berücksichtigung der Formeln (1), (2), (4), (5), (7) und (8):

$$\sin \tfrac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\sin(p-b) \pm \sin(p-a)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin p \,.\, \sin(p-c)}{\sin a \,.\, \sin b}}$$
$$= \frac{\sin(p-b) \pm \sin(p-a)}{\sin c} \cos \tfrac{1}{2} C,$$

$$\cos \tfrac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\sin p \mp \sin(p-c)}{\sin c} \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a \sin b}}.$$
$$= \frac{\sin p \mp \sin(p-c)}{\sin c} \,.\, \sin \tfrac{1}{2} C.$$

Ferner ist:

$$\sin(p-a) + \sin(p-b) = 2 \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$\sin(p-b) - \sin(p-a) = 2 \cos \tfrac{1}{2} c \sin \tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$\sin p + \sin(p-c) = 2 \sin \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2} c,$$
$$\sin p - \sin(p-c) = 2 \cos \tfrac{1}{2}(a+b) \sin \tfrac{1}{2} c,$$
$$\sin c = 2 \sin \tfrac{1}{2} c \cos \tfrac{1}{2} c,$$

und folglich hat man:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin \tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos \tfrac{1}{2} C} = \dfrac{\cos \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos \tfrac{1}{2} c}, \\[2ex] \dfrac{\sin \tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos \tfrac{1}{2} C} = \dfrac{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin \tfrac{1}{2} c}, \\[2ex] \dfrac{\cos \tfrac{1}{2}(A+B)}{\sin \tfrac{1}{2} C} = \dfrac{\cos \tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos \tfrac{1}{2} c}, \\[2ex] \dfrac{\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{\sin \tfrac{1}{2} C} = \dfrac{\sin \tfrac{1}{2}(a+b)}{\sin \tfrac{1}{2} c}. \end{cases}$$

Diese Formeln hat Gauß zuerst gefunden. —

§. 143. Wenn man die erste der Gleichungen (1) durch die dritte, die zweite durch die vierte, die vierte durch die dritte und die zweite durch die erste dividirt; so erhält man die vier folgenden Neper'schen Formeln:

$$(2)\quad\begin{cases} \tang \tfrac{1}{2}(A+B) = \dfrac{\cos \tfrac{1}{2}(a-b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a+b)} \,.\, \cot \tfrac{1}{2} C, \\ \tang \tfrac{1}{2}(A-B) = \dfrac{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a+b)} \,.\, \cot \tfrac{1}{2} C, \\ \tang \tfrac{1}{2}(a+b) = \dfrac{\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{\cos \tfrac{1}{2}(A+B)} \,.\, \tang \tfrac{1}{2} c, \\ \tang \tfrac{1}{2}(a-b) = \dfrac{\sin \tfrac{1}{2}(A-B)}{\sin \tfrac{1}{2}(A+B)} \,.\, \tang \tfrac{1}{2} c, \end{cases}$$

wovon jede fünf Elemente eines sphärischen Dreieckes enthält. —

Anwendung der Neper'schen Formeln zur Auflösung der sphärischen Dreiecke.

§. 144. Die Neper'schen Formeln können mit Vortheil zur Auflösung der sphärischen Dreiecke angewandt werden, weil dabei keine Hülfswinkel erforderlich sind, wie wir nun noch zeigen wollen.

Zweiter Fall. — Wenn zwei Seiten a, b und der einer gegenüberliegende Winkel A gegeben sind, die Seite c und die beiden andern Winkel B, C zu berechnen.

Den Winkel B berechnet man nach der Formel:

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a},$$

und alsdann geben die Neper'schen Formeln für den Winkel C und die Seite c:

$$(1)\quad\begin{cases} \cot \tfrac{1}{2} C = \dfrac{\tang \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}(a+b)}{\cos \tfrac{1}{2}(a-b)}, \\ \tang \tfrac{1}{2} c = \dfrac{\tang \tfrac{1}{2}(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}, \end{cases}$$

oder:

$$(2)\quad\begin{cases} \cot \tfrac{1}{2} C = \dfrac{\tang \tfrac{1}{2}(A-B) \sin \tfrac{1}{2}(a+b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}, \\ \tang \tfrac{1}{2} c = \dfrac{\tang \tfrac{1}{2}(a-b) \sin \tfrac{1}{2}(A+B)}{\sin \tfrac{1}{2}(A-B)}. \end{cases}$$

Untersuchung. — In dem besondern Falle $a = b$ ist auch $A = B$, und die Formeln (1) geben:

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \tang A \cos a,$$
$$\tang \tfrac{1}{2} c = \tang a \cos A.$$

Soll die Aufgabe möglich sein, so ist erforderlich, aber auch hinreichend, daß:

$\cot \frac{1}{2} C$ und $\tang \frac{1}{2} c$

positiv sind, d. h. tang A und cos a, so wie cos A und tang a einerlei Zeichen haben, oder daß A und a gleichartig sind, und alsdann gibt es nur eine Auflösung.

Wenn die Aufgabe in dem allgemeinen Falle möglich sein soll, so muß:

$$\frac{\sin b \sin A}{\sin a} < 1$$

sein, und wenn diese Bedingung erfüllt wird; so gibt es zwei Werthe von B, welche der Gleichung:

$$\sin B = \frac{\sin b \, . \, \sin A}{\sin a}$$

genügen, wovon der eine $M < 90^0$ und der andere $M' = 180^0 - M$ ist. —

Soll einer dieser Werthe von B der Aufgabe entsprechen, so ist erforderlich und genügend: daß die correspondirenden Werthe von $\cot \frac{1}{2} C$ und $\tang \frac{1}{2} c$ positiv, und folglich nach (2), $A - B$ und $a - b$ gleichartig sind in Hinsicht des Zeichens. Wenn also der Werth M der Aufgabe entsprechen soll, so müssen $A - M$ und $a - b$ gleiche Zeichen haben, und wenn M' der Aufgabe entsprechen soll, so müssen $A - M'$ und $a - b$ dasselbe Zeichen haben. — Die Aufgabe kann folglich eine, zwei, oder gar keine Auflösung haben.

1) Es sei $A < 90^0$ und $b < 90^0$. — Wenn $a < b$ ist, so gibt die Formel:

$$\sin B = \frac{\sin b \, . \, \sin A}{\sin a}$$

$M > A$, und um so mehr $M' > A$; es gibt also zwei Auflösungen.

Wenn $a > b$ ist, so kann sein:

$$a + b < 180^0, \; a + b = 180^0, \; a + b > 180^0.$$

Im ersten Falle hat man:

$$b < 180^0 - a, \; \sin b < \sin a$$

und $M < A$; aber da $M' > A$ ist, so gibt es nur eine Auflösung.

Wenn $a + b = 180^0$ ist, so ist:

$$b = 180^0 - a, \; \sin b = \cos a,$$

ferner $M = A$ und $M' > A$. Es gibt also gar keine Auflösung.

Ist $a + b > 180^0$, so hat man:

$$b > 180^0 - a, \quad \sin b > \sin a,$$

also $M > A$, und um so mehr $M' > A$. Es gibt folglich wieder keine Auflösung.

2) Es sei $A < 90^0$ und $b > 90^0$. — Wenn $a < b$ ist, so kann sein:

$$a + b < 180^0, \quad a + b = 180^0, \quad a + b > 180^0.$$

Im ersten Falle hat man:

$$b < 180^0 - a, \quad \sin b > \sin a,$$

ferner $M > A$ und um so mehr $M' > A$. Es gibt also zwei Auflösungen.

Im zweiten Falle: $a + b = 180^0$ hat man:

$$b = 180^0 - a, \quad \sin b = \sin a$$

und $M = A$, $M' > A$. Es gibt also nur eine Auflösung.

Im dritten Falle: $a + b > 180^0$ hat man:

$$b > 180^0 - a, \quad \sin b < \sin a$$

und $M < A$, aber $M' > A$; es gibt also wieder eine Auflösung.

Wenn $a > b$ ist, so hat man:

$$\sin a < \sin b,$$

weil a und b stumpf sind. Alsdann ist $M > A$, und um so mehr $M' > A$; folglich gibt es keine Auflösung.

Die Untersuchung für $A > 90^0$ ist der vorhergehenden ganz gleich, und man kann die Resultate mit den bereits erhaltenen in folgende Uebersicht zusammenstellen:

$A < 90^0$	$b < 90^0$	$a < b$	zwei Auflösungen,
		$a = b$	eine Auflösung,
		$a > b$ und $a + b < 180^0$	eine Auflösung,
		$a > b$ und $a + b \geqq 180^0$	keine Auflösung,
	$b > 90^0$	$a < b$ und $a + b < 180^0$	zwei Auflösungen,
		$a < b$ und $a + b \geqq 180^0$	eine Auflösung,
		$a = b$, oder $a > b$	keine Auflösung,

$$A > 90^0 \begin{cases} b < 90^0 \begin{cases} a < b, \text{ oder } a = b \ldots\ldots\ldots \text{ keine Auflösung,} \\ a > b \text{ und } a + b > 180^0 \ldots \text{ zwei Auflösungen,} \\ a > b \text{ und } a + b \overset{=}{<} 180^0 \ldots \text{ keine Auflösung,} \end{cases} \\ b > 90^0 \begin{cases} a < b \text{ und } a + b > 180^0 \ldots \text{ eine Auflösung,} \\ a < b \text{ und } a + b \overset{=}{<} 180^0 \ldots \text{ keine Auflösung,} \\ a = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ eine Auflösung,} \\ a > b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ zwei Auflösungen,} \end{cases} \end{cases}$$

Wir haben den Fall $A = 90^0$ nicht betrachtet, weil alsdann das Verfahren in §. 129. anzuwenden ist, und ebensowenig den Fall $b = 90^0$, weil dieser Fall sich vermittelst des Supplementardreieckes auf den Fall eines rechtwinkligen Dreieckes zurückführen läßt, wie bereits in §. 134. bemerkt worden.

§. 145. Dritter Fall. — Wenn zwei Seiten a, b und der zwischenliegende Winkel C gegeben sind, die Seite c und die Winkel A, B zu berechnen.

Die Neper'schen Formeln geben:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (A + B) = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (a - b)}{\cos \tfrac{1}{2} (a + b)} . \cot \tfrac{1}{2} C,$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (A - B) = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (a - b)}{\sin \tfrac{1}{2} (a + b)} . \cot \tfrac{1}{2} C,$$

und für die Seite c hat man nach §. 140:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\sin \triangle . \sin (C - \triangle)}{\sin (A - \triangle) \sin (B - \triangle)}}.$$

Die Aufgabe gestattet offenbar nur eine Auflösung.

§. 146. Vierter Fall. — Wenn eine Seite c und die beiden anliegenden Winkel A, B gegeben sind, den Winkel C und die beiden Seiten a, b zu berechnen.

Die Neper'schen Formeln geben:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a + b) = \frac{\cos \tfrac{1}{2} (A - B)}{\cos \tfrac{1}{2} (A + B)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c,$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a - b) = \frac{\sin \tfrac{1}{2} (A - B)}{\sin \tfrac{1}{2} (A + B)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c,$$

und den Winkel C berechnet man nach der Formel:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{\sin (p - a) \sin (p - b)}{\sin p . \sin (p - c)}}.$$

Fünfter Fall. — Wenn zwei Winkel A, B und die einem derselben gegenüberliegende Seite a gegeben sind, den Winkel C und die beiden Seiten b, c zu berechnen.

Die Seite b ergibt sich nach der Formel:

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A},$$

und alsdann geben die Neper'schen Formeln:

$$\tang \tfrac{1}{2} c = \frac{\tang \tfrac{1}{2}(a-b) \sin \tfrac{1}{2}(A+B)}{\sin \tfrac{1}{2}(A-B)},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \frac{\tang \tfrac{1}{2}(A-B) \sin \tfrac{1}{2}(a+b)}{\sin \tfrac{1}{2}(a-b)}.$$

Es kann zwei Auflösungen geben, und die Untersuchung ist ganz dieselbe, wie in §. 144. Auch kann man diesen Fall durch Anwendung des Polardreieckes auf den zweiten Fall zurückführen, wie schon früher bemerkt worden.

Auflösung eines sphärischen Dreieckes, dessen Seiten gegen den Halbmesser der Kugel sehr klein sind.

§. 147. Legendre hat einen schönen Lehrsatz entdeckt, welcher später von Gauß verallgemeinert worden ist, und mit Hülfe dessen man die Auflösung eines sphärischen Dreieckes, dessen Seiten gegen den Halbmesser der Kugel sehr klein sind, auf die Auflösung eines geradlinigen Dreieckes zurückführen kann. — Wir wollen diesen an sich interessanten und in der Geodäsie sehr nützlichen Lehrsatz hier beweisen, zuvor aber eine vereinfachende Definition aufstellen.

Es seien α, β, γ die Zahlen, welche die Seiten eines auf einer Kugel von dem Halbmesser R liegenden sphärischen Dreieckes messen, und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Zahlen, welche die Gegenwinkel messen, oder was nach §. 95. dasselbe ist: die diesen Winkeln entsprechenden und mit dem Halbmesser = 1 beschriebenen Bogen; so wird die Zahl:

$$\varepsilon = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \pi$$

der sphärische Exceß genannt, und wenn F die Fläche des Dreieckes bezeichnet, so ist bekanntlich:

$$(1) \qquad \varepsilon = \frac{F}{R^2}.$$

Der Legendre'sche Lehrsatz lautet nun wie folgt:

„Wenn ein sphärisches Dreieck gegeben ist, dessen Seiten gegen den Halbmesser der Kugel sehr klein sind, und man construirt ein geradliniges Dreieck, dessen Seiten denen des sphärischen gleich sind; so sind die Flächen beider Dreiecke einander gleich, und die Winkel des sphärischen Dreieckes sind denen des ebenen Dreieckes, jeden um ein **Drittel** des sphärischen Excesses vermehrt, gleich."

Der Beweis dieses Lehrsatzes beruht auf den in §. 65. gegebenen Reihenentwickelungen für sin x und cos x, und wenn x ein sehr kleiner Bogen ist; so hat man nahezu, wenn die höhern Potenzen von x als die vierte unbeachtet bleiben:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Nach §. 122. hat man also:

$$\cos\frac{\alpha}{R} = \cos\frac{\beta}{R}\cos\frac{\gamma}{R} + \sin\frac{\beta}{R}\sin\frac{\gamma}{R}\cos\mathfrak{A},$$

folglich:

$$\cos\mathfrak{A} = \frac{\cos\frac{\alpha}{R} - \cos\frac{\beta}{R}\cos\frac{\gamma}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}\sin\frac{\gamma}{R}}.$$

Setzt man hierin folgende Werthe:

$$\cos\frac{\alpha}{R} = 1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4}{24R^4},$$

$$\cos\frac{\beta}{R} = 1 - \frac{\beta^2}{2R^2} + \frac{\beta^4}{24R^4},$$

$$\cos\frac{\gamma}{R} = 1 - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \frac{\gamma^4}{24R^4},$$

$$\sin\frac{\beta}{R} = \frac{\beta}{R} - \frac{\beta^3}{6R^3}, \quad \sin\frac{\gamma}{R} = \frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma^3}{6R^3},$$

und läßt die höhern als die vierten Potenzen von $\frac{1}{R}$ wieder unbeachtet; so erhält man:

$$\cos \mathfrak{A} = \frac{\dfrac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\,R^2} + \dfrac{\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - 6\,\beta^2\gamma^2}{24\,R^4}}{\dfrac{\beta\gamma}{R^2}\left(1 - \dfrac{\beta^2 + \gamma^2}{6\,R^2}\right)}.$$

Läßt man den dem Zähler und Nenner gemeinschaftlichen Faktor $\frac{1}{R^2}$ hinweg, macht die Entwickelung:

$$\frac{1}{1 - \dfrac{\beta^2 + \gamma^2}{6\,R^2}} = 1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{6\,R^2} + \ldots$$

und läßt die Glieder mit $\frac{1}{R^4}$ unbeachtet; so findet man endlich:

$$(2)\quad \cos \mathfrak{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\,\beta\gamma} - \frac{2\,\alpha^2\beta^2 + 2\,\alpha^2\gamma^3 + 2\,\beta^2\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{24\,\beta\gamma R^2}.$$

Bezeichnen nun F′ die Fläche des geradlinigen Dreieckes, dessen Seiten α, β, γ sind, und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die Gegenwinkel; so ist:

$$\cos \mathfrak{A}' = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\,\beta\gamma},$$

$$\sin^2 \mathfrak{A}' = \frac{2\,\alpha^2\beta^2 + 2\,\alpha^2\gamma^2 + 2\,\beta^2\gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2}{4\,\beta\gamma}.$$

Hiernach wird die Gleichung (2):

$$\cos \mathfrak{A} = \cos \mathfrak{A}' - \frac{\beta\gamma \sin^2 \mathfrak{A}'}{6\,R^2},$$

oder wegen $F' = \frac{1}{2}\,\beta\gamma \sin \mathfrak{A}'$:

$$(3)\qquad \cos \mathfrak{A} = \cos \mathfrak{A}' - \frac{F'}{3\,R^2} \cdot \sin \mathfrak{A}'.$$

Setzt man nun:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + x,\ \text{alſo}\ \cos \mathfrak{A} = \cos \mathfrak{A}' \cos x - \sin \mathfrak{A}' \sin x,$$

so kann man wegen der Kleinheit des Winkels x nehmen $\cos x = 1$, $\sin x = x$, und alsdann wird:

$$(4)\qquad \cos \mathfrak{A} = \cos \mathfrak{A}' - x \sin \mathfrak{A}';$$

folglich wegen (3) und (4):

$$x = \frac{F'}{3R^2}.$$

Man hat alſo:

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \dfrac{F'}{3\,R^2}, \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' + \dfrac{F'}{3\,R^2}, \\ \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' + \dfrac{F'}{3\,R^2}, \end{cases}$$

und wenn man diese Gleichungen addirt, und bemerkt: daß $\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}' = \pi$ ist:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \pi + \frac{F'}{R^2},$$

oder:

$$\varepsilon = \frac{F'}{R^2}.$$

Es ist mithin $F' = F$, und die Gleichungen (5) geben:

$$(6)\quad \begin{cases} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}' + \dfrac{\varepsilon}{3}, \\ \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' + \dfrac{\varepsilon}{3}, \\ \mathfrak{C} = \mathfrak{C}' + \dfrac{\varepsilon}{3}, \end{cases}$$

wodurch der Legendre'sche Lehrsatz bewiesen ist. —

§. 148. Wenn, wie gewöhnlich, A, B, C und A′, B′, C′ die in den Winkeln des sphärischen und des entsprechenden ebenen Dreieckes enthaltenen Anzahlen von Graden ꝛc. bezeichnen; so kann man die Gleichungen (6) auch folgendermaßen ausdrücken:

$$(7)\quad \begin{cases} A = A' + 60 \,.\, \dfrac{\varepsilon}{\pi} = A' + 60 \,.\, \dfrac{F'}{\pi\,R^2}, \\ B = B' + 60 \,.\, \dfrac{\varepsilon}{\pi} = B' + 60 \,.\, \dfrac{F'}{\pi\,R^2}, \\ C = C' + 60 \,.\, \dfrac{\varepsilon}{\pi} = C' + 60 \,.\, \dfrac{F'}{\pi\,R^2}. \end{cases}$$

§. 149. Von diesem Lehrsatze kann man nun folgende Anwendung machen:

1) Wenn die drei Seiten α, β, γ des sphärischen Dreieckes gegeben sind, so berechnet man die Winkel A′, B′, C′ und die Fläche F′ des geradlinigen Dreieckes, dessen Seiten α, β, γ sind, und alsdann geben die Formeln (7) die Winkel A, B, C.

2) Wenn zwei Seiten α, β und der zwischenliegende Winkel C gegeben sind, so hat man:

$$F' = \tfrac{1}{2}\,\alpha\beta \sin C',$$

wofür man nehmen kann:

$$F' = \tfrac{1}{2}\,\alpha\beta \sin C,$$

weil dieser Werth von dem wahren nur um eine Größe von der Kleinheitsordnung von $\frac{1}{R^2}$ verschieden ist. — Man berechnet also F' nach der letzten Formel, und alsdann gibt die dritte der Gleichungen (7) den Winkel C'. Hierauf löst man das geradlinige Dreieck auf, wovon man die Elemente α, β und C' kennt, wodurch man γ, A' und B' erhält, und die Gleichungen (7) geben dann A, B. —

3) Wenn die Seiten α, β und der Winkel A gegeben sind, so gibt die erste der Gleichungen (7) den Winkel A', und der Winkel B' wird durch die Formel:

$$\sin B' = \frac{\beta \sin A'}{\alpha}$$

gegeben, wofür man ohne merklichen Fehler nehmen kann:

$$\sin B' = \frac{\beta \sin A}{\alpha}.$$

Nachdem der Winkel B' gefunden ist, bestimmt man F' durch die Formel:

$$F' = \tfrac{1}{2}\,ab \sin (A' + B'),$$

und alsdann geben die Formeln (7) die Winkel B, C. —

4) Wenn A, B und γ gegeben sind, so hat man:

$$F' = \frac{\gamma^2}{2} \cdot \frac{\sin A' \sin B'}{\sin (A' + B')},$$

wofür man ohne merklichen Fehler nehmen kann:

$$F' = \frac{\gamma^2}{2} \cdot \frac{\sin A \sin B}{\sin (A + B)}.$$

Nachdem F' gefunden ist, werden A' und B' durch die Formeln (7) gegeben, und man hat alsdann blos noch ein geradliniges Dreieck aufzulösen, worin A', B' und γ gegeben sind.

Anhang.

Aufgaben zum ersten Buche.

Man soll folgende Formeln herleiten:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = \cos a$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = -\sin a$,

2) $\frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)} = \frac{\tang a + \tang b}{\tang a - \tang b}$,

3) $\tang 2a - \tang a = \frac{\sin a}{2\cos^3 a - \cos a} = \frac{2 \sin a}{\cos a + \cos 3a}$,

4) $\tang a = \cot a - 2 \cot 2a = \frac{\sin 2a}{1 + \cos 2a} = \frac{1 - \cos 2a}{\sin 2a}$,

5) $2 \sin a - \sin 2a = (2 \sin a + \sin 2a) \tang^2 \frac{1}{2} a$,

6) $(1 - \tang \frac{1}{2} a) \tang a = 1 - \sec a + \tang \frac{1}{2} a (1 + \sec a)$,

7) $\tang \frac{1}{2} a \tang \frac{3}{2} a = \frac{\cos a - \cos 2a}{\cos a + \cos 2a}$,

8) $\tang 3a \tang a = \frac{\tang^2 2a - \tang^2 a}{1 - \tang^2 a \cdot \tang^2 2a}$,

9) $\tang 2a + \sec 2a = \frac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a}$,

10) $\frac{1 - 2\sin^2 a}{1 + \sin 2a} = \frac{1 - \tang a}{1 + \tang a} = \frac{1}{\tang 2a \cdot \sec 2a}$,

11) $\cos^2 2a - \sin^2 a = \cos a \cdot \cos 3a$,

12) $\tang^2 2a - \tang^2 a = \frac{\sin 3a \sin a}{\cos^2 2a \cdot \cos^2 a}$,

13) $\cot^2 a \cdot \cos^2 a = \cot^2 a - \cos^2 a$,

14) $\operatorname{cosec} 2a = \frac{1 + \cot^2 a}{2 \cot a}$,

15) $\sec^2 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a = \sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a$,

16) $\cot^2 \frac{1}{2} a = \frac{2 \sin a + \sin 2a}{2 \sin a - \sin 2a}$,

17) $\tang a = \frac{\sin \frac{2}{3} a + \sin \frac{4}{3} a}{\cos \frac{2}{3} a + \cos \frac{4}{3} a}$,

18) $\tang 2a = \frac{\sin a + \sin 3a}{\cos a + \cos 3a}$,

19) $\operatorname{tang} 3a = \frac{\sin a + \sin 3a + \sin 5a}{\cos a + \cos 3a + \cos 5a}$,

20) $2 \cot 2a = \cot\left(\frac{\pi}{2} + a\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$,

21) $\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{2} + a\right) - \cot^2\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \operatorname{cosec}^2 a - \sec^2 a$,

22) $\sec^2 a = \frac{2 \sec 2a}{1 + \sec 2a}$,

23) $\operatorname{cosec}^2 a = \frac{2 \sec 2a}{\sec 2a - 1}$,

24) $\sin b = \sin(a + b) \cos a - \cos(a + b) \sin a$,

25) $\cos a + \cos(a + 2b) = (2 \cos \tfrac{1}{2} b - 1) \cos(a + b)$,

26) $\sin(a + b) \sin(3a - b) = \sin^2(2a - b) - \sin^2(2b - a)$,

27) $\sin^2(a + b) - \sin^2(a - b) = \sin 2a \,.\, \sin 2b$,

28) $\cos^2(a + b) - \sin^2 a = \cos b \cos(2a + b)$,

29) $\sin^2(a + b) = \sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b \cos(a + b)$,

30) $\frac{\sin 2(a + b)}{\sin 2a + \sin 2b} = \frac{\cos(a + b)}{\cos(a - b)} = \frac{\cot b - \operatorname{tang} a}{\cot b + \operatorname{tang} a}$,

31) $\operatorname{tang}^2 a - \operatorname{tang}^2 b = \frac{\sin(a + b) \,.\, \sin(a - b)}{\cos^2 a \,.\, \cos^2 b}$,

32) $\frac{\operatorname{tang}(a + b) + \operatorname{tang}(a - b)}{\operatorname{tang}(a + b) - \operatorname{tang}(a - b)} = \frac{\operatorname{tang} a (1 + \operatorname{tang}^2 b)}{\operatorname{tang} b (1 + \operatorname{tang}^2 a)}$,

33) $\sin(a + h) - \sin a = 2 \cos(a + \tfrac{1}{2} h) \sin \tfrac{1}{2} h$,

34) $\cos(a + h) - \cos a = -2 \sin(a + \tfrac{1}{2} h) \sin \tfrac{1}{2} h$,

35) $\sin a = \frac{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} a}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}$,

36) $\cos a = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} a}$,

37) $\cot^2 b - \cot^2 a = \frac{\sin(a + b) \sin(a - b)}{\sin^2 a \,.\, \sin^2 b}$,

38) $\frac{\cos(a + b)}{\cos(a - b)} = \frac{\cot a - \operatorname{tang} b}{\cot a + \operatorname{tang} b}$,

39) $1 + \sin 2a = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$,

40) $1 - \sin 2a = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$,

41) $\frac{\cos 2a}{1 + \sin 2a} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$,

42) $\frac{\cos 2a}{1 - \sin 2a} = \cot\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$,

43) $\tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$,

44) $\cos 2a = \frac{1 - \tan^2 a}{1 + \tan^2 a}$,

45) $\sin 2a = \frac{2 \tan a}{1 + \tan^2 a}$,

46) $\sin^2(a + b) - \sin^2 b = \sin(a + 2b) \cdot \sin a$,

47) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \frac{1 + \tan a}{1 - \tan a}$,

48) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \frac{1 - \tan a}{1 + \tan a}$,

49) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 2 \tan 2a$,

50) $\tan a - \tan b = 2 \tan(a - b)$, wenn $a + b = \frac{\pi}{2}$ ist,

51) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right) = \sec 2a + \tan 2a$,

52) $\tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \sec 2a - \tan 2a$,

53) $\cot a = \operatorname{cosec} 2a + \cot 2a$,

54) $\tan a = \operatorname{cosec} 2a - \cot 2a$,

55) $2 \operatorname{cosec} 2a = \tan a + \cot a$,

56) $\sec 2a = \frac{1 + \tan^2 a}{1 - \tan^2 a}$,

57) $\operatorname{cosec} 2a - 1 = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\tan 2a}$,

58) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + a\right) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 1$,

59) $1 + \sin a = \frac{(1 + \tan \frac{1}{2} a)^2}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a}$,

60) $1 - \sin a = \frac{(1 - \tan \frac{1}{2} a)^2}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} a}$,

61) $\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)$,

62) $\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$,

63) $$\sin a = \cos\left(\frac{\pi}{6} - a\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + a\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{6} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} - a\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\right]$$
$$= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}a\right) - 1$$
$$= \frac{1 - \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)}{1 + \operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)}$$
$$= \frac{1 - \cot^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{a}{2}\right)}{1 + \cot^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{a}{2}\right)}$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right),$$

64) $$\cos a = \sin\left(\frac{\pi}{6} + a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - a\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\right]$$
$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3} + a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - a\right)\right],$$

65) $$\sin\left(\frac{\pi}{6} \pm a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} \mp a\right) = \frac{\cos a \pm \sqrt{3}\sin a}{2},$$

66) $$\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} \mp a\right) = \sqrt{\frac{1 \pm \sin 2a}{2}},$$

67) $$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{a}{2}\right) . \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{a}{2}\right) = \frac{2\cos a - 1}{2\cos a + 1},$$

68) $$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right) = \frac{\cos a}{1 \mp \sin a},$$

69) $$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{a}{2}\right) = \frac{1 \pm \sin a}{\cos a} = \sec a \pm \operatorname{tang} a,$$

70) $$\sin a = 4\sin \tfrac{1}{3}a . \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{a}{3}\right) . \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{a}{3}\right),$$

71) $\cos a = 4 \cos \tfrac{1}{3} a \,.\, \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{a}{3}\right) . \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{a}{3}\right)$,

72) $2 \sec a = \sec\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) . \sec\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$,

73) $\sec a = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) - \operatorname{tang} a$

$= \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) - \operatorname{tang} a$,

74) Wenn $a + b + c = \pi$ ist, so hat man:

$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos\frac{a}{2} . \cos\frac{b}{2} . \cos\frac{c}{2}$,

$\cot\frac{a}{2} + \cot\frac{b}{2} + \cot\frac{c}{2} = \cot\frac{a}{2} . \cot\frac{b}{2} . \cot\frac{c}{2}$,

$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \cos a . \cos b . \cos c$,

$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + 4 \cos a . \cos b . \cos c + 1 = 0$,

$\cos 4a + \cos 4b + \cos 4c + 1 = 4 \cos 2a . \cos 2b . \cos 2c$,

$\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2} + \cos\frac{c}{2} = 4 \cos\frac{\pi - a}{4} . \cos\frac{\pi - b}{4} . \cos\frac{\pi - c}{4}$,

$\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2} - 1 = 4 \sin\frac{\pi - a}{4} . \sin\frac{\pi - b}{4} . \sin\frac{\pi - c}{4}$,

$\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{c}{2} + 2 \sin\frac{a}{2} . \sin\frac{b}{2} . \sin\frac{c}{2} = 1$,

$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - 2 \cos a . \cos b . \cos c = 2$,

$\sin^2 2a + \sin^2 2b + \sin^2 2c + 2 \cos 2a . \cos 2b . \cos 2c = 0$,

75) $\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a . \operatorname{tang} b . \operatorname{tang} c$

$= 1 - \operatorname{tang} a . \operatorname{tang} b - \operatorname{tang} a . \operatorname{tang} c - \operatorname{tang} b . \operatorname{tang} c$,

76) $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)$

$= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)$,

77) $\cot \tfrac{1}{2} a + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a = 2 \operatorname{cosec} a$,

78) $\cot \tfrac{1}{2} a - \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a = 2 \cot a$,

79) $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a + \cot a = \operatorname{cosec} a$,

80) $\cot \tfrac{1}{2} a - \cot a = \operatorname{cosec} a$,

81) $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} a . \operatorname{tang} a = \sec a - 1$,

82) $\cot \tfrac{1}{2} a . \operatorname{tang} a = \sec a + 1$,

83) $\sin (n + 1) a + \sin (n - 1) a = 2 \sin na . \cos a$,

84) $\sin (n + 1) a - \sin (n - 1) a = 2 \cos na . \sin a$,

85) $\cos (n + 1) a + \cos (n - 1) a = 2 \cos na . \cos a$,

86) $\cos(n+1)a - \cos(n-1)a = -2 \sin na \,.\, \sin a$,

87) Für beliebige Werthe von a, b, c ist:

$$\sin a + \sin b + \sin c - 4 \cos\frac{a}{2} \,.\, \cos\frac{b}{2} \,.\, \cos\frac{c}{2} =$$

$$\sin\frac{a+b+c-\pi}{4}\left[\cos\frac{3a-b-c-\pi}{4} + \cos\frac{3b-c-a-\pi}{4} + \cos\frac{3c-a-b-\pi}{4} + \cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\right].$$

88) Wenn $a + b + c = \frac{\pi}{2}$ ist, so hat man:

$$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \,.\, \tan b \,.\, \tan c + \sec a \,.\, \sec b \,.\, \sec c.$$

89) Wenn die Bogen a, b, c eine arithmetische Progression bilden, so ist:

$$\sin a - \sin c = 2 \sin(a-b) \cos b,$$

$$\tan(a-b) = \frac{\cos a - \cos c}{\sin a + \sin c} = \frac{\sin a - \sin c}{\cos a + \cos c},$$

$$\frac{\tan b}{\tan(b-c)} = \frac{\sin a + \sin c}{\sin a - \sin c} \,.\, \frac{\tan\left(\frac{a+c}{2}\right)}{\tan\left(\frac{a-c}{2}\right)},$$

$$\sin a \,.\, \sin c = [\sin b + \sin(a-b)] \,.\, [\sin b - \sin(a-b)].$$

90) Wenn $a + b + c = \frac{\pi}{4}$ ist und a, b, c eine arithmetische Progression bilden, so hat man:

$$\sqrt{3} - \tan a = (1 + \sqrt{3} \tan a) \tan c.$$

91) Wenn $a + b + c = \pi$ ist, und sin a, sin b, sin c eine arithmetische Progression bilden; so ist:

$$\sin\frac{a}{2} \,.\, \sin\frac{b-c}{2} = \sin\frac{c}{2} \,.\, \sin\frac{a-b}{2}.$$

92) Wenn $a + b + c = \pi$ ist, und cos a, cos b, cos c eine arithmetische Progression bilden; so ist:

$$2 \cos\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} = \cos^2\frac{b}{2}.$$

93) Wenn $\tan a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und $\tan b = \frac{1}{\sqrt{15}}$ ist, so ist:

$$\sin(a+b) = \sin 60^0 \,.\, \cos 36^0,$$

$$\sin(a-b) \sin c - \sin(a-c) \sin b + \sin(b-c) \sin a = 0.$$

94) Wenn $\cos a = \cos b \cos c$ ist, so ist auch:

$$\operatorname{tang} \frac{a + b}{2} . \operatorname{tang} \frac{a - b}{2} = \operatorname{tang}^2 \frac{c}{2}.$$

95) Wenn $\sin (a + b) \cos c = 2 \cos (b - c) \sin a$ ist, so ist auch:

$$\cot a - \cot b = 2 \operatorname{tang} c.$$

96) Wenn $\sin^3 x = \sin (a - x) \sin (b - x) \sin (c - x)$ und $a + b + c = \pi$ ist, so ist auch:

$$\cot x = \cot a + \cot b + \cot c.$$

97) Man soll jede der trigonometrischen Linien als Funktion von $\sin 2 a$ und $\sin \frac{a}{2}$, von $\cos 2 a$ und $\cos \frac{a}{2}$, von $\operatorname{tang} 2 a$ und $\operatorname{tang} \frac{a}{2}$, von $\cot 2 a$ und $\cot \frac{a}{2}$, 2c. ausdrücken.

98) Aus der Gleichung $\operatorname{tang} 2 a = 3 \operatorname{tang} a$ den Werth von a zu finden.

99) Man soll aus der Gleichung:

$$\frac{1 + \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang} a} = \tfrac{1}{2} \sec 2 a$$

den Werth von a ableiten.

100) Den Werth von a zu finden, welcher der Gleichung:

$$\operatorname{tang} \frac{a}{2} = \operatorname{cosec} a - \sin a$$

genügt.

101) Aus der Gleichung:

$$\operatorname{tang} a + 2 \cot 2 a = \sin a \left(1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} \frac{a}{2}\right)$$

den Werth von a zu finden.

102) Den Werth von a zu finden, welcher der Gleichung:

$$\sin 3 a - 2 \sin 2 a + \sin^2 a + 4 \sin^3 a = o$$

genügt.

103) Aus der Gleichung:

$$\sin 4 a + 4 \sin 3 a \cos a = o$$

den Werth von a zu finden.

104) Den Werth von a zu finden, welcher den Gleichungen:

$$\sin 2 a . \cos 2 a + 3 \cos a \cos 3 a = o,$$
$$\sin (a + b) + \sin (a - b) = \cos (a + b) + \cos (a - b),$$
$$\sin (a + b) - \sin (a - b) = \operatorname{tang} 60^0 \sin a$$

genügt.

105) Aus der Gleichung: $\tan a + \tan b = \sec a$ das Verhältniß von a zu b zu finden.

106) Aus der Gleichung:

$$\tan c + 2 \tan (a - c) = \tan (a + b - c)$$

den Werth von tang c abzuleiten.

107) Einen Bogen in zwei Theile a, b so zu theilen, daß:

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{n}{m}.$$

108) Aus der Gleichung:

$$\sin (a - b) = \cos (a + b) = \tfrac{1}{2}$$

die Werthe von a und b zu finden.

109) Aus den Gleichungen:

$$\cos a + \cos b = m,\quad \cos 5a + \cos 5b = n$$

das Verhältniß von a zu b zu finden.

110) Aus den Gleichungen:

$$\tan a \,.\, \tan b = m,$$
$$\tan a \,.\, \tan c = n,$$
$$a + b + c = \pi$$

die Werthe von tang a, tang b und tang c zu finden.

111) Aus der Gleichung:

$$\tan (x + a) \tan (x - a) = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

x abzuleiten.

112) Man soll aus der Gleichung:

$$\tan a \tan x = \tan^2 (a + x) - \tan^2 (a - x)$$

den Werth von x finden.

113) Man soll aus den Gleichungen:

$$\operatorname{cosec} a - \sin a = m,\quad \sec a - \cos a = n$$

den Bogen a eliminiren.

114) Man soll x und y aus den Gleichungen:

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = m,$$
$$b \sin^2 y + a \cos^2 y = n,$$
$$a \tan x = b \tan y$$

eliminiren.

115) Wenn x einen bestimmten Werth hat und h **unendlich klein** wird, so finden folgende Gleichheiten statt;

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x,$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x,$$

$$\frac{\operatorname{tang}(x-h)-\operatorname{tang} x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

$$\frac{\cot(x+h)-\cot x}{h} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x,$$

$$\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x \sec^2 x,$$

$$\frac{\operatorname{cosec}(x+h)-\operatorname{cosec} x}{h} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cos x \operatorname{cosec}^2 x.$$

116) Aus der Gleichung:

$$\operatorname{arc}\sec a + \operatorname{arc}\sec\frac{x}{a} = \operatorname{arc}\sec b + \operatorname{arc}\sec\frac{x}{b}$$

einen algebraischen Ausdruck für x abzuleiten.

117) Man soll aus der Gleichung:

$$\operatorname{arc}\sin\frac{x}{a} - \operatorname{arc}\sin\frac{y+b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \operatorname{arc}\sin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\pi}{2}$$

eine Relation zwischen x und y herleiten.

118) Wenn

$$\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} c = \operatorname{tang} a \,.\, \operatorname{tang} b \,.\, \operatorname{tang} c$$

ist, den Werth von $a + b + c$ zu finden.

119) Es ist:

$$\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} c + \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c = 1,$$

man soll den Werth von $a + b + c$ finden.

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x,$$

$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = -\sin x,$$

$$\frac{\tang(x-h) - \tang x}{h} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

$$\frac{\cot(x+h) - \cot x}{h} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x,$$

$$\frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sin x \sec^2 x,$$

$$\frac{\operatorname{cosec}(x+h) - \operatorname{cosec} x}{h} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\cos x \operatorname{cosec}^2 x.$$

116) Aus der Gleichung:

$$\operatorname{arc\,sec} a + \operatorname{arc\,sec} \frac{x}{a} = \operatorname{arc\,sec} b + \operatorname{arc\,sec} \frac{x}{b}$$

einen algebraischen Ausdruck für x abzuleiten.

117) Man soll aus der Gleichung:

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{x}{a} - \operatorname{arc\,sin} \frac{y+b}{\sqrt{a^2+b^2}} + \operatorname{arc\,sin} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\pi}{2}$$

eine Relation zwischen x und y herleiten.

118) Wenn

$$\tang a + \tang b + \tang c = \tang a \,.\, \tang b \,.\, \tang c$$

ist, den Werth von a + b + c zu finden.

119) Es ist:

$$\tang a \tang b + \tang a \tang c + \tang b \tang c = 1,$$

man soll den Werth von a + b + c finden.

Schnuse, Christian Heinrich,

Die Grundlehren der Theorie der Kreisfunktionen, der ebenen Trigonometrie
und Polygonometrie und der sphärischen Trigonometrie

Stuttgart 1852